

Pension og Tilbagetrækning
- Ikke-parametrisk Estimation af Heterogenitet

Søren Arnberg
Danish Economic Councils

Peter Philip Stephensen
Danish Rational Economic Agent Model

7. juli 2013

Arbejdsrapport 2013: Foreløbigt Udkast

Pension og Tilbagetrækning

- Ikke-parametrisk Estimation af Heterogenitet

Søren Arnberg
Danish Economic Councils

Peter Philip Stephensen
Danish Rational Economic Agent Model

Arbejdsrapport: foreløbigt udkast

Abstract

Dette papir præsenterer empiri for effekten af økonomiske incitamenter på ældre arbejders tilbagetrækningsbeslutning. Analysen er baseret på registerdata for beskæftigede, der var 59 år i 2001, og variation i de offentlige overførsler fra det danske pensionssystem anvendes til at bestemme de 59-åriges præferencer for tilbagetrækning (også kaldet præferencer for fritid). Papiret præsenterer beskrivende tabeller og grafer, der indikerer, at tilbagetrækningen reagerer på skift i de økonomiske incitamenter til at udskyde tilbagetrækning hen over tilbagetrækningsalder. For personer med pensionsopsparing er der et pænt sammenfald mellem skift i de økonomiske incitamenter og den faktiske tilbagetrækning. Herefter udledes en model, der estimerer de 59-åriges præferencer for fritid på baggrund af de 59-åriges observerede tilbagetrækningsalder og gevinsten af at forblive i beskæftigelse. Modellen er inspireret af option value-modellen, men adskiller sig på flere måder, bl.a. ved tillade heterogenitet i præferencerne. Output af modellen er en estimeret fordeling af præferencer for fritid. Præferencefordelingen estimeres ikke-parametrisk. De estimerede præferencer for fritid har en størrelsesorden på mellem 1.4 og 1.8. Det svarer til, at nytten af en pensionskrone er 1.4 til 1.8 gange så høj som af lønindkomst.

Den estimerede model bruges til at fremskrive tilbagetrækningsadfærd for fremtidige seniorer og til konsekvensberegninger, der illustrerer betydningen af ændrede økonomiske incitamenter til tilbagetrækning, jf. Dansk Økonomi, forår 2013.

Indhold

1.	Indledning	- 4 -
2.	Data og økonomiske incitamentter	- 7 -
2.1.	Finansielle incitamentter	- 9 -
3.	Empirisk model for tilbagetrækning med heterogenitet	- 13 -
3.1.	Intuition i tilbagetrækningsmodellen	- 14 -
3.2.	Model	- 22 -
3.2.1	Det deterministiske tilfælde	- 26 -
3.2.2	Estimation af præference-fordeling	- 26 -
3.2.3	Forecasting inden for estimationssamplet.....	- 28 -
3.2.4	Likelihood-funktion	- 29 -
3.2.5	Tilbagetrækning neutral ved lige store stigninger i indkomster og formue....	- 29 -
4.	Estimation og resultater	- 29 -
4.1.	Missing values og numeriske problemer	- 31 -
	Muligt at reparere af observationer med numeriske problemer.....	- 31 -
4.2.	Præferencer for fritid varierer mellem køn- og uddannelsesgrupper.....	- 32 -
4.2.1	Køn.....	- 33 -
4.2.2	Uddannelse og køn.....	- 35 -
4.3.	Relativ risikoaversion over tid (ρ) og indifferenskurvernes krumning.....	- 38 -
4.4.	Estimationsresultater for alternative grader af risikoaversion over tid (ρ)....	- 39 -
5.	Fremskrivning af arbejdsstyrke og konsekvensberegninger.....	- 41 -
	Referencer:.....	- 41 -

1. Indledning

Hvor vigtige er økonomiske incitamenter for den individuelle beslutning om at trække sig tilbage? For at kunne forudsige effekten af reformer af pensionssystemet er det vigtigt at kende svaret på dette spørgsmål. I Danmark er der de seneste år gennemført en række reformer af pensionssystemet, der har til hensigt at udskyde tilbagetrækningsalderen. Efterlønsordningen er blevet forringet, og folkepensionsalderen bliver udskudt i takt med, at vi lever længere. Samtidig er arbejdsmarkedspensionerne, der blev udbygget i midt-halvfemserne, ved at blive modnede, således at de fleste grupper på arbejdsmarkedet i fremtiden vil have store pensionsopsparinger. For at kunne forudsige effekten af disse reformer er det vigtigt at vide i, hvilket omfang ældre arbejdere (fremover benævnt seniorer) reagerer på økonomiske incitamenter, når de beslutter sig for tilbagetrækning.

I dette papir undersøges det, i hvilket omfang seniorer reagerer på økonomiske incitamenter, når de vælger tilbagetrækningsalder. En økonometrisk model for seniorers tilbagetrækningsbeslutning udledes. Den har udgangspunkt i mikro-data/registerdata. Modellen estimerer seniorers præferencer for fritid på baggrund af deres observerede tilbagetrækningsalder og gevinsten af at forblive i beskæftigelse. Præferencer for fritid afspejler nytten af fritid i forhold til nytten af forbrug. Fritidspræferencerne angiver nytten af en pensionsindkomst i forhold til lønindkomst. Den estimerede model bruges til at fremskrive tilbagetrækningsadfærden for fremtidige seniorer og til konsekvensberegninger, der illustrerer betydningen af ændrede økonomiske incitamenter til tilbagetrækning, jf. Dansk Økonomi, forår 2013.

Modellen er inspireret af Stock & Wise, 1990 (fremover S&W), men den adskiller sig på 4 områder:

1. *S&W antager, at forbrugerne står overfor usikkerhed med hensyn til den fremtidige nytte af en given indkomstprofil.* Forbrugeren kender ikke sine præferencer med sikkerhed. Denne stokastik skal inddrage uobserverede determinanter for tilbagetrækningen. S&W skriver, at de stokastiske effekter "...could reflect individual preferences for work versus leisure. Or they could reflect evolving health status. They could reflect differences among individuals in unobserved wealth and other variables that may affect retirement decisions". Denne stokastik leder frem til option value tilgangen i S&W. *I dette papirs approach antages det i stedet, at forbrugeren kender sine fremtidige præferencer.* Vi måler forskelle i præferencer for fritid på en anden måde (se nedenfor). Hvad angår de stokastiske skift i sundhedstilstand, antager vi, at de gratis hospitaler i Danmark gør denne effekt uvæsentlig. Forskelle i formue tages der eksplicit hensyn til i vores analyse.

2. *S&W antager implicit, at forbrugerne er kreditrationerede eller irrationelle. De måler nytte ved at putte indkomst direkte ind i en CRRA-nyttfunktion.¹ Dette må nødvendigvis fortolkes som, at det løbende forbrug er lig indkomsten. Og dette sker kun, hvis forbrugeren er kreditrationeret eller følger en simpel tommelfingerregel. I dette papirs approach antages det, at forbrugeren står overfor et perfekt kreditmarked og maksimerer tilbagediskonteret forventet CRRA-nytte. Der er usikkerhed mht. dødstidspunktet.*
3. *Homogene versus heterogene præferencer for fritid: S&W definerer parameteren $k \geq 1$, som angiver præferencer for fritid. S&W estimerer k under antagelse af, at k er ens for alle forbrugere. I dette papirs approach antages det i stedet, at k varierer i populationen. Vi estimerer en fordeling af k 'er i populationen.*
4. *Forbrugerne i S&W's model har lav relativ risikoaversion med begrænset forbrugsudglatning til følge. S&W angiver, at nyttfunktion er en CRRA-funktion og har formen $U(Y) = Y^\gamma$. Parameteren γ estimeres til en værdi mellem 0 og 1.*

CRRA-nyttfunktion angives oftest som: $U(Y) = \frac{Y^{1-\rho}}{1-\rho}$ (*), hvor ρ er koeffi-

cienten for relativ risiko-aversion. Der er en vis konsensus om, at $\rho \approx 2$, jf. [henvisninger]. Dette svarer til en nyttfunktion $U(Y) = -1/Y$. Denne nyttfunktion er ikke et specialtilfælde af S&W's form. S&W udelukker således den nyttfunktion, som de fleste bruger. Resultatet at $0 < \gamma < 1$, svarer til, at $0 < \rho < 1$. Dette beskriver forbrugere med lav relativ risikoaversion og dermed begrænset forbrugsudglatning. I analysen i dette papir benyttes den fulde specifikation (*). I princippet kunne vi estimere parameteren ρ . For at simplificere problemstillingen er det i stedet valgt at sætte $\rho=2$ og supplere med følsomhedsanalyser, hvor ρ antager andre værdier

Her kommer på et senere tidspunkt en blok med flere referencer til relevant litteratur

- Manoli & Weber – estimation på humps i tilbagetrækningen (2011)
- Rust & Phelan
- Andre

Her kommer en blok om systemet og data

For at studere sammenhængen mellem økonomiske incitamenter og den faktiske tilbagetrækning præsenteres først deskriptiv statistik. Statistikken viser, at tilbagetrækningen klumper sig sammen ved de tilbagetrækningsaldrer, hvor incitamenterne til tilbagetrækning er størst. Dette mønster indikerer, at økonomiske incitamenter motiverer folk til at udskyde

¹ Constant Relative Risk Aversion

tilbagetrækning. Mønstrer er mest udtalt for grupper med en vis pensionsopsparing, hvilket medfører flere skift i de finansielle incitamenter hen over tilbagetrækningsalder. Skiftene i de finansielle incitamenter er en følge af reglerne for modregning af pensionsopsparing i de offentlige pensionsoverførsler. Et vigtigt eksempel er 2 års-reglen for udbetaling af efterløn: Det er muligt at undgå, at pensionsopsparing bliver modregnet i efterlønnen, hvis tilbagetrækningen udskydes 2 år i forhold til den tidligste efterlønsalder.

Herefter udledes den empiriske model for tilbagetrækningsbeslutningen. Modellen bruger skiftene i de økonomiske incitamenter og den faktiske tilbagetrækningsalder til at estimere seniorers præferencer for fritid. Modellen anvender effektive formuer for alle hypotetiske tilbagetrækningsalder til at beskrive de økonomiske incitamenter til at udskyde tilbagetrækning.² Dette muliggør at bruge den estimerede model til at forudsige effekten på tilbagetrækningen af økonomiske reformer.

Modellen tillader heterogene præferencer for fritid. Der er udviklet en ikke-parametrisk metode til at estimere heterogeniteten i præferencerne for fritid. Det demonstreres, at man ved hjælp af en iterativ proces konverger mod den korrekte fordeling. Grundideen i metoden minder om Train (2007), selvom den faktiske implementering afviger en del fra denne. Hvor Train tager udgangspunkt i momenterne i en given teoretisk fordeling, er vores metode ikke-parametrisk.

Tilbagetrækningsmodellen estimeres separat for 12 grupper opdelt på køn og uddannelse. Vi får således 12 fordelinger af præferencer for fritid. Medianen af de estimerede præferencer fritid er mellem 1,4 og 1,8, svarende til, at nytten af en pensionskrone er 1.4 til 1.8 gange så høj som af lønindkomst. Modellen sammenlignes med en model, der kun er opdelt på køn. Den estimerede model giver en rimelig god forudsigtelse af den faktiske tilbagetrækning. Den forudsiger, at tilbagetrækningen er koncentreret omkring alderne 60 og 62 år. Modellens evne til at forudsige tilbagetrækningen er bedst for grupper, der har skift i økonomiske incitamenter hen over de hypotetiske tilbagetrækningsalder. Blandt uddannelsesgrupperne tegner seniorer med en mellemlang eller lang videregående uddannelse sig for de bedste fit. Dette stemmer overens med, at disse grupper havde store pensionsopsparinger i 2001. Omvendt er fit'et lidt dårligere for ufaglærte og faglærte seniorer. Disse grupper havde relativt små pensionsopsparinger i 2001 og dermed generelt små skift i de økonomiske incitamenter hen over de hypotetiske tilbagetrækningsalder.

² De hypotetiske effektive formuer er den tilbagediskonterede sum af alle fremtidig indkomster. De afhænger af tilbagetrækningsalderen.

Den estimerede tilbagetrækningsmodel bruges til at forudsige tilbagetrækningen for fremtidens seniorer givet de gennemførte reformer af pensionssystemet og til konsekvensberegninger af policyforslag, jf. Dansk Økonomi, forår (2013).

Her kommer på et tidspunkt en blok om diskussion af resultater ift. litteraturen

Papiret er struktureret således, at næste afsnit præsenterer de anvendte data til analyserne og giver en empirisk beskrivelse af udviklingen i de økonomiske incitamenter hen over tilbagetrækningsaldrer. Tilbagetrækningsmodellen udledes i afsnit 3, mens afsnit 4 præsenterer estimationsresultater.

2. Data og økonomiske incitamenter

Analyserne tager udgangspunkt i registerdata for alle, der var født i 1942. De var 59 år i 2001. Data er forløbsdata, idet de 59-årige følges frem til de er 67 år (dvs. 2009). Specifikt anvendes der information om de 59-åriges indkomster, fri formue (ejendomsværdi og finansielle aktiver og passiver) og offentlige overførsler. Desuden anvendes information om medlemskab af efterlønsordningen og værdier for opsparede pensionsformuer (livrente, ratepension og kapitalpension).³ Når de informationer kombineres, kan der beregnes et komplet billede af pensionsoverførsler efter tilbagetrækning.

For at undersøge betydningen af finansielle incitamenter på tilbagetrækningen fokuseres på de 59-årige, der er i beskæftigelse frem til tilbagetrækning.⁴ Data til analyserne er begrænset på flere andre måder, jf. tabel 1. Alt i alt indgår der 29.251 personer i analyserne, jf. tabel 1. Af disse er knap 27.000 medlem af efterlønsordningen (92 pct.).

Tabel 1: Udvalgelse af data til analyserne

Hvem slettes i datasættet? (Årgang 1942)	I alt	Antal slettes	Andel ud af oprindelig sample
Årgang 1942, som stadig er i live i 2001 (som 59-årige)	66176		
Er stadig i live i 2009	59408	6768	10%
Erhvervsindkomst \geq 90.000 kr. som 59-årige	38220	21188	32%
Har ikke tidligere har været på førtidspension, over-	37153	1067	2%

³ Disse oplysninger er leveret af Styrelsen for Fastholdelse og Rekruttering

⁴ Denne restriktion er indført for at sikre, at personerne ikke i praksis har trukket sig tilbage før det officielle tilbagetrækningstidspunkt, og dels fordi vi bruger lønnen op til tilbagetrækningstidspunktet som proxy for den hypotetiske fremtidige indkomst, hvis man i stedet havde valgt at fortsætte i beskæftigelse.

gangsydelse og fleksydelse			
Er ikke tjenestemænd	32383	4770	7%
Erhvervsindkomst over 90.000 (2001-niveau) i årene op til tilbagetrækning	29251	3132	5%
I alt	29251	36925	56%

Kilde: Egne beregninger på registerdata

De ufaglærte og faglærte har lavest pensionsformue og trækker sig tidligst tilbage

Der er store forskelle i de opsparede pensionsformuer mellem uddannelsesgrupperne, hvor de ufaglærte og faglærte har markant lavere pensionsformuer end personer med en lang eller en mellemlang videregående uddannelse. Det hænger sammen med, at arbejdsmarkedspensionerne først gradvist blev udbredt til LO/DA-området i begyndelsen af 1990'erne. De fleste 59-årige faglærte og ufaglærte i 2001 havde derfor kun sparet op i få år. Omvendt har de fleste ansatte i den offentlige sektor indbetalt til en arbejdsmarkedspension i hele deres arbejdsliv. Personer med mellemlange og lange videregående uddannelser har især job i den offentlige sektor.

Tabel 2: Beskrivende statistik for estimationssamplet (beskæftigede 59-årige i 2001)

Beskrivende statistik formuer	Tilbage-trækningsalder	Pensionsformue 2001 (1000kr)	Arbejdsindkomst 2001 (1000kr)	Effektiv formue 2001 (1000kr)
	Gns.	Median	Median	Median
Alle samlet	62.7	200	254	2.439
Mænd Uoplyst	63.6	186	303	2.339
Mænd Ufaglært	62.7	111	258	2.137
Mænd Faglært	62.9	153	281	2.309
Mænd KVU	63.4	378	314	2.565
Mænd MVU	63.9	1.950	392	3.336
Mænd LVU	64.9	2.974	446	3.944
Kvinder Uoplyst	62.7	264	244	2.515
Kvinder Ufaglært	61.7	108	205	2.304
Kvinder Faglært	62.1	236	221	2.480
Kvinder KVU	62.8	555	251	2.914
Kvinder MVU	62.4	1.341	267	3.007
Kvinder LVU	64.2	2.692	3.780	4.071

Anm. Tabellen tager udgangspunkt i de 29.262 beskæftigede, der er i estimationssamplet. Indkomster og formuer er opgjort ved 59 år. Den effektive formue er opgjort som den tilbagediskonterede sum af alle fremtidige indkomster ved en tilbagetrækningsalder på 60 år. Diskonteringsfaktoren er den nominelle rente minus PAL-skat.

Kilde: Egne beregninger på registerdata

Tilbagetrækning er koncentreret omkring aldrene 60, 62 og 67 år eller senere, jf. tabel 3. Henholdsvis 30 pct. og 26 pct. af de 59-årige beskæftigede trak sig tilbage som 60 og 62-årige, mens 14 pct. endnu ikke havde trukket sig tilbage, da de var 67 år.

Tabel 3: Tilbagetrækningsalder i data

Tilbagetrækningsalder	Antal	Andel (pct.)	Kumuleret andel (pct.)
60	8.710	30	30
61	1.327	5	34
62	7.567	26	60
63	2.462	8	69
64	1.141	4	72
65	3.001	10	83
66	1.092	4	86
67 eller senere	3.962	14	100
<i>Total</i>	<i>29.262</i>	<i>100</i>	

Anm. En person defineres som pensionist, hvis han/hun falder ind under mindst en af de følgende kategorier: i) har en erhvervsindkomst på under 90.000 kr. i 2 på hinanden følgende år og ikke modtager arbejdsmarkedsrelaterede overførselsindkomster; ii) modtager arbejdsmarkedspension eller privat pension over et grænsebeløb (svarende til omtrent 68.000 kr. i 2001); iii) modtager efterløn og iv) modtager folkepension og har en erhvervsindkomst på under 90.000 kr om året.

Kilde: Egne beregninger på registerdata

2.1. Finansielle incitamenter

At tilbagetrækningen klumper sig sammen omkring aldrene 60 og 62 år skal ses i sammenhæng med pensionssystemets indretning i 2001. 60 år er den alder, hvor man tidligst kan få efterløn. Men hvis man venter med at trække sig, til man bliver 62 år, vil anden pensionsindkomst (fx fra pensionsopsparinger) ikke blive modregnet i efterlønnen og efterlønsatsen er højere. 65 år er den alder man tidligst kan få folkepension, ældrecheck og boligydelse. Hvis man har arbejdet, indtil man er fyldt 65 år, er der kraftige incitamenter til at fortsætte med at arbejde, fordi man kan opsætte folkepensionen.⁵ Man mister således meget lidt i offentlige overførsler, når tilbagetrækningen udskydes. Personer, der ikke er medlem af efterlønsordningen, og som stopper med at arbejde før 65 år, skal leve for egne midler fx af udbetalinger fra egen pensionsopsparing.

Fremtidige indkomster afhænger af alder for tilbagetrækning

⁵ Muligheden for at opsætte folkepensionen blev indført i 2005. Personer, der har trukket sig tilbage før dette år, har formentlig ikke vidst, at det efter 2005 ville blive tilladt at opsætte folkepensionen.

Indkomsterne i resten af den 59-åriges liv afhænger af, hvornår han trækker sig tilbage. Beslutningen om hvorvidt han skal trække sig tilbage nu eller at udskyde tilbagetrækning, indebærer en vurdering af den økonomiske gevinst af at fortsætte med at arbejde. I det følgende beskrives gevinsterne af at udskyde tilbagetrækning for de 59-årige i 2001. Til det formål har vi beregnet hypotetiske effektive formuer med udgangspunkt i registerdata om de 59-åriges indkomstforhold. Med dette begreb forstås det samlede tilbagediskonterede forventede rådighedsbeløb for en person i resten af dennes liv. De effektive formuer består således af indtægter fra erhvervsarbejde og offentlige overførsler (efterløn, folkepensionens grundbeløb, pensionstillæg mv.) efter modregning i andre indkomster og skat samt finansiell formue og opsparret pensionsformue (efter skat). De effektive formuer beregnes for hver hypotetisk tilbagetrækningsalder mellem 60 og 67 år uanset den 59-åriges observerede tilbagetrækningsalder.⁶

Udvikling i effektive formuer for efterlønsberettigede og ikke-berettigede

Figur 1 nedenfor viser udviklingen i de effektive formuer med tilbagetrækningsaldrene for typepersoner, der er forskellige med hensyn til erhvervsindkomst, pensionsopsparing og medlemskab af efterlønsordningen. Figur 1.a viser udviklingen i den effektive formue (opgjort i niveau) for typepersoner, der er berettigede til efterløn, mens figur 1.b viser ændringen i den effektive formue, når tilbagetrækning udskydes i et år, for de samme typepersoner. Figur 1.c og 1.d viser tilsvarende opgørelser for personer, der ikke er med i efterlønsordningen.

De effektive formuer vokser med tilbagetrækningsalderen

De effektive formuer vokser, hvis de 59-årige fortsætter med at arbejde og får en indkomst, der er større end efterlønnen. En 59-årig enlig boligejer, der var berettiget til efterløn, men som ikke havde nogen pensionsopsparing kunne forvente at have en effektiv formue på knap 1,9 mio. kr., hvis vedkommende trak sig som 60-årig. Denne består af indkomster fra efterløn, folkepension og ældrecheck fratrukket skat. Hvis vedkommende ventede med at trække sig til 61 år, ville den effektive formue stige med knap 30.000 kr. til godt 1,9 mio. kr., jf. figur 1.a. og figur 1.b. Stigningen skyldes, at personen får erhvervsindkomst. Til gengæld går personen glip af offentlige pensionsindkomster (især efterløn) i det år. For de fleste gælder det, at erhvervsindkomsten større end de offentlige overførsler, man er berettiget til som pensionist. Derfor stiger den effektive formue, hvis man udskyder tilbagetrækning.

Pensionsopsparing modregnes i efterlønnen

⁶ Beregningen af de effektive formuer er nærmere beskrevet i Dansk Økonomi, Forår 2013

Pensionsopsparing modregnes i efterlønnen, jf. Dansk Økonomi forår 2013, afsnit II.2. Men modregningen kan undgås, hvis personen udskyder tilbagetrækning i 2 år og samtidig arbejder i denne periode (2-års-reglen). For medlemmer af efterlønsordningen med en vis pensionsopsparing er der således positive finansielle incitamentter til at udskyde tilbagetrækningen til 62 år eller senere. Efterlønsatsen er 91 pct. af dagpengene. Hvis 2 årsreglen opfyldes forhøjes satsen til 100 pct. af dagpengene. Dette er også et incitament til at udskyde tilbagetrækning til 62 år. I figur 1.a-1.d. kan skift i incitamentterne ses ved, at kurverne knækker. Således afspejler knækkene ved 62 år, at gevinsten ved at udskyde tilbagetrækning fra 61 til 62 år er større end ved at udskyde tilbagetrækning fra 60 til 61 år.

Samlivsstatus påvirker incitament til at trække sig som 62-årig

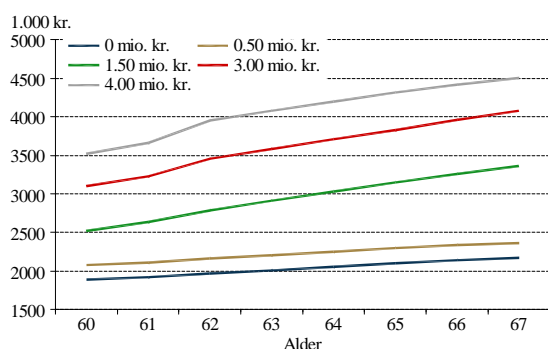
Udbetalinger fra pensionsopsparing modregnes i pensionstillægget. Dette har betydning for det økonomiske incitament til at trække sig tilbage som 62-årig. Selvom 2-årsreglen giver mulighed for at undgå modregning af pensionsopsparing i efterlønnen, kan denne økonomiske fordel blive 'ophævet' af en hårdere modregning i pensionstillægget. For at undgå modregning af pensionsopsparing i efterlønnen skal man foruden at opfylde 2-års-regelen også udskyde udbetaling af pensionsopsparingen til, man er fyldt 65 år. For personer med livrenteopsparinger betyder det markant højere livrenteudbetalinger, især fordi livrenten forventes at skulle udbetales over færre år. Det medfører hårdere modregning i pensionstillægget. Modregningen i pensionstillægget er mildere for samlevende, fordi deres pensions-tillæg er lavere. Isoleret set medfører det, at par har et større økonomisk incitament til at trække sig som 62-årige end enlige.

Boligejerskab påvirker incitament til at trække sig som 62-årig

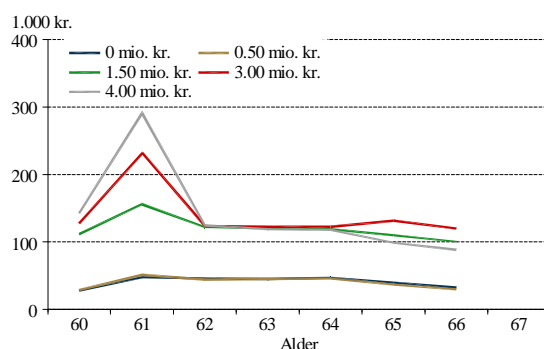
En tilsvarende problemstilling gælder for boligydelse. Udbetalinger fra pensionsopsparinger modregnes i evt. boligydelse for lejere. Hvis man opfylder 2 års-regelen og venter med at få livrenten udbetalt til, man er 65 år, kan man undgå modregning af pensionsopsparing i efterlønnen. Men det medfører større livrenteudbetalinger, og evt. mere modregning i boligydelsen. Dette reducerer det økonomiske incitament til at trække sig tilbage som 62-årig for lejere med en vis pensionsopsparing.

Figur 1. Udvikling i hypotetiske effektive formuer med tilbagetrækningsalder

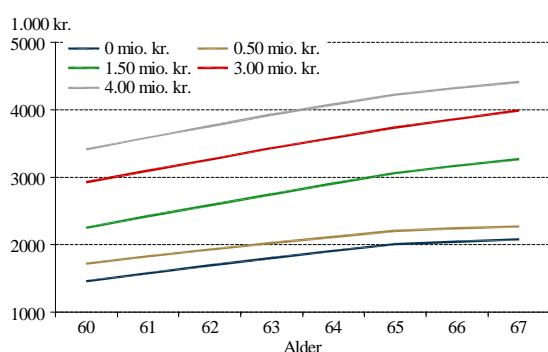
a. Efterlønsberettigede: niveau



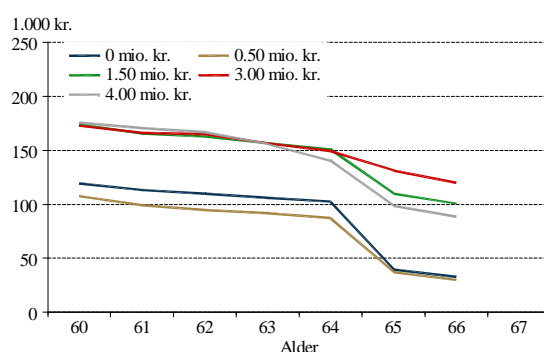
b. Efterlønsberettigede: ændring



c. Ikke-Efterlønsberettigede: niveau



d. Ikke-Efterlønsberettigede: ændring



Anm. Figur 1.a. og 1.c. viser udviklingen i den hypotetiske effektive formue for typepersoner hen over tilbagetrækningsaldrer. Den hypotetiske effektive formue er opgjort som den tilbagediskonterede sum af alle fremtidige indkomster. Figur 1.b. og 1.d. viser ændringen i den effektive formue, når tilbagetrækning udskydes i et år. Ændringen i den effektive formue i punktet 60 år angiver ændringen ved at udskyde tilbagetrækning fra 60 til 61 år og tilsvarende for de næste tilbagetrækningsaldrer. De enkelte grafer er opdelt efter størrelsen af pensionsopsparingen ved 59 år. Ligeledes er der forskel på erhvervsindkomsten. Der er antaget en initial erhvervsindkomst som 59-årig på 200.000 kr. for typepersoner med pensionsopsparinger på 0 mio. kr. og 0,5 mio. kr. For personer med en pensionsopsparing på 1,5 mio. kr. 3 mio. kr. og 4 mio. kr. er det antaget, at erhvervsindkomsten er 400.000 kr. som 59-årig. De viste typepersoner er enlige boligejere.

Kilde: Egne beregninger på registerdata

Skift i finansielle incitamenter bestemmer tilbagetrækningen

Skiftene i de finansielle incitamenter er med til at bestemme tilbagetrækningen. Incitamentet til at trække sig som 62-årig eller senere vokser med pensionsopsparingen, jf. figur. 1.a-1.d.⁷ Samtidig gælder det, at andelen, der trækker sig som 62-årige eller senere, stiger med pensionsopsparingen, jf. tabel 4. Det indikerer, at de finansielle incitamenter har betydning for valget af tilbagetrækningsalder.

⁷ Det kan ses af, at knækkene er kraftigere jo større pensionsopsparing.

Andre faktorer end finansielle incitamenter har også betydning

Blandt personer med en pensionsopsparing på under en ¼ mio. kr. trækker en stor andel sig tilbage som 62-årige på trods, at incitamentet til at udskyde tilbagetrækning til 62 år er lille, jf. tabel 4. Dette indikerer, at andre faktorer end de finansielle incitamenter også har betydning for tilbagetrækningen.

Tabel 4: Tilbagetrækning i pct. opdelt på samlet pensionsopsparing i kr. (efterlønsberettigede ejere)

	Formue < 50.000 kr.	50.000 kr < formue < ¼ mio. kr.	¼ mio. kr. < formue < ½ mio. kr.	½ mio. kr. < formue < 1½ mio. kr.	1½ mio. kr. < formue < 3 mio. kr.	formue > 3 mio. kr.
60	38	38	28	30	25	21
61	6	5	4	3	4	3
62	25	28	31	32	29	30
63	7	8	9	9	10	12
64	3	4	5	4	4	5
65	7	7	9	10	10	11
66	3	3	4	3	4	4
67+	11	8	10	10	13	14
<i>antal</i>	<i>2.560</i>	<i>4.312</i>	<i>1.361</i>	<i>2.252</i>	<i>2.610</i>	<i>2.188</i>

Anm. Størrelsen af pensionsopsparingen er opgjort ved 59 år.

Kilde: Egne beregninger på registerdata

3. Empirisk model for tilbagetrækning med heterogenitet

Den 59-årige står overfor et valg om, hvornår han skal trække sig tilbage. Hvis han vælger at fortsætte med at arbejde, vil han kunne tjene løn eller anden erhvervsindkomst. Omvendt, hvis han vælger at trække sig tilbage, vil han kunne have mere fritid og modtage offentlige pensionsoverførsler og udbetalinger fra egen pensionsopsparing. Som regel er indkomsten som erhvervsaktiv større end indkomsten som pensionist, jf. figur 1.a-1.d. Personens værdisætning af fritiden i forhold til den ekstra indkomst som erhvervsaktiv bestemmer, hvornår personen ønsker at trække sig tilbage. Værdisætningen af fritiden i forhold til den ekstra indkomst som erhvervsaktiv benævnes 'præferencer for fritid' og fortolkes som den vægt, der angiver nytten af pensionsindkomst i forhold til erhvervsindkomst. For eksempel hvis præferencerne for fritid er 2, betyder det, at pensionsindkomst giver dobbelt så høj nytte som erhvervsindkomst. Han skal med andre ord være i stand til at tjene

mere end det dobbelte ved at forblive på arbejdsmarkedet for ikke at vælge tilbagetrækning nu.

I dette afsnit præsenteres en empirisk model for tilbagetrækning, som bruger skiftene i de finansielle incitamenters samt den faktiske tilbagetrækningsalder til at identificere de 59-åriges præferencer for fritid.⁸ Først præsenteres intuitionen bag modellen, mens modellen udledes i afsnit 3.2.

3.1. Intuition i tilbagetrækningsmodellen

Modellen i afsnit 3.2 er en model til analyse og fremskrivning af tilbagetrækningsbeslutninger, som er inspireret af 'option value' modellen med de tidligere nævnte forskelle (Stock & Wise, 1990). Udgangspunktet er en 59-årig person, der skal vælge tilbagetrækningsalder under hensyntagen til de økonomiske gevinster af at udskyde tilbagetrækning og vedkommendes præferencer for fritid.

Samme tankegang som i Stock & Wise

Tankegangen i modellen er den samme som i Stock & Wise (1990) med de nævnte forskelle, jf. indledningen: Den 59-årige betragter nyttegevinsten af at fortsætte med at arbejde i 1 år mere. Så længe denne overstiger nyttetabet, vil personen fortsætte med at arbejde. Gevinsten af at fortsætte med at arbejde i et år er nytten af erhvervsindkomst minus skat, mens nyttetabet er mistet pensionsindkomst mv. justeret med mistet fritid i samme periode. Personen trækker sig tilbage, når den marginale gevinst ikke længere overstiger det marginale tab.

Forskelle i effektive formuer angiver finansiell nettogevinst af arbejde

De effektive formuer opgør den tilbagediskonterede indkomst i resten af livet for givne tilbagetrækningsalder. Den finansielle nettogevinst af at fortsætte med arbejde i et år er forskellen mellem de effektive formuer ved tilbagetrækning henholdsvis nu og året efter. Som regel er den direkte finansielle nettogevinst – dvs. før der justeres for fritid – altid positiv, fordi de fleste har større erhvervsindkomst end pensionsindkomst.

⁸ Modellen er også udledt i Stephensen (2013), hvor der også findes beviser for theoremerne.

Ingen nytte fritid implicerer meget sen tilbagetrækning

En person, der ikke forbinder den mistede fritid ved at arbejde med et nyttetab, tillægger lønindkomst og pensionsindkomst den samme nytte. Denne person vil udskyde tilbagetrækning, så længe den finansielle nettogevinst af arbejde er positiv, hvilket normalt afspejles i sen tilbagetrækningsalder. Dette svarer til en relativ vægtning af fritid på 1. Vægtningen anføres i det følgende med parameteren k . Specialtilfældet, hvor $k = 1$, er vist i figur 2.a. Figuren viser et eksempel på, hvordan den effektive formue udvikler sig med tilbagetrækningsalderen. De effektive formuer kan også fortolkes som en budgetrestriktion. Desuden er der aftegnet en indifferenskurve for tilbagetrækning. Denne er meget flad, fordi personen er ligeglad, om indkomsten er pensionsindkomst eller erhvervsindkomst. Indifferenskurven, som er approximativt lineær, er bestemt ud fra personens præferencer for fritid (k), som økonometrikeren ikke kender. Den optimale tilbagetrækningsalder i modellen findes som det punkt på budget-kurven, der tangeres af indifferenskurven. I tangeringspunktet er nytten maksimeret. Hvis den effektive formue stiger med tilbagetrækningsalderen, vil det optimale tilbagetrækningstidspunkt være den seneste mulige tilbagetrækningsalder – her 67 år.

Uendelig store præferencer for fritid implicerer tidligst mulig tilbagetrækning

Hvis personen forbinder den mistede fritid ved arbejde med et nyttetab, vil han have større nytte af pensionsindkomst end af lønindkomst. Han vil fortsætte med at arbejde, så længe nyttegevinsten af arbejde overstiger nyttetabet. Tilbagetrækning vil da kunne ske, selv om den finansielle nettogevinst af arbejde stadig er positiv. Dette tilfælde svarer til $k > 1$. Hvis $k \rightarrow \infty$ afspejles det i en meget stejl indifferenskurve for tilbagetrækning, jf. figur 2b. Personer, der har uendelig store præferencer for fritid vil trække sig tilbage så tidligt som muligt, uanset størrelsen af den finansielle nettogevinst af at fortsætte med at arbejde. I modellen er den tidligste tilbagetrækningsalder 60 år.

'Normale' præferencer for fritid (k 'er)

Figur 2.c viser indifferenskurven for en person, der har $1 < k < \infty$. Indifferenskurven har positiv hældning. I eksemplet i figur 2c, er den optimal tilbagetrækningsalder hverken er i modellens start- eller slut-år. Det fremgår desuden, at større k 'er (stejlere indifferenskurver) trækker i retning af tidligere tilbagetrækning, og at mindre k 'er (fladere indifferenskurver) trækker i retning af senere tilbagetrækning, jf. figur 2.d.

Indifferenskurvers hældning er bestemt af k og af nytteniveauet

Indifferenskurvens hældning er bestemt af k , idet større k 'er afspejles i stejlere indifferenskurver, jf. figur 2.d. Indifferenskurvens hældning er også bestemt af nytteniveauet, idet indifferenskurven for et højt nytteniveau er stejlere end indifferenskurven for lavt nytteniveau.

Identifikation af præferencer for fritid for hver 59-årig

Økonometrikeren kender ikke de 59-åriges k 'er. Det er dem, vi ønsker at estimere. Det antages i modellen, at den 59-årige kender de fremtidige indkomster for hver hypotetisk tilbagetrækningsalder, dvs. de effektive formuer. Med udgangspunkt i denne information samt viden om den 59-åriges faktiske tilbagetrækningsalder er det muligt at finde værdier af k -parameteren, der er konsistente med den faktiske tilbagetrækningsalder. De konsistente k 'er er afbilledet af indifferenskurver, der tangerer effektive formue-kurven i punktet for den faktiske tilbagetrækningsalder. I tangeringspunktet er nytten maksimeret mht. tilbagetrækningsalder.

Flere forskellige løsninger for k i den deterministiske model

Det fremgår af figur 2.e., at der godt kan være flere k 'er, der er konsistente med den faktiske tilbagetrækningsalder for en person. Dette ses af, at flere forskellige hældninger på indifferens-kurven – og dermed forskellige k -værdier – kan være konsistente med den faktiske tilbagetrækningsalder.

Entydige løsninger for k i stokastisk model med uobserveret heterogenitet

Det antages, at tilbagetrækningsbeslutningen også er bestemt af ikke-økonomiske incitamenter, som er kendt af den 59-årige, men ikke af økonometrikeren. De ikke-økonomiske incitamenter karakteriseres som uobserveret heterogenitet, der er tilfældig fordelt. Tilstedeværelsen af uobserveret heterogenitet gør det muligt at estimere entydige k 'er for hver person ved hjælp af økonometriske metoder. Dette beskrives i de to næste blokke.

Sandsynlighed for en tilbagetrækningsalder givet k

Antag at økonometrikeren kender den 59-åriges økonomiske forhold (de effektive formuer). Antag desuden – for et øjeblik – at økonometrikeren kender den 59-åriges sande præferencer for fritid. Da vil han kunne udregne sandsynligheden for tilbagetrækning i hver af de hypotetiske tilbagetrækningsaldre. F.eks. hvis $k=1,5$ vil økonometrikeren kunne udregne sandsynligheden for tilbagetrækning i hver af de hypotetiske tilbagetrækningsaldre. Tilsvarende vil han kunne udregne tilbagetrækningsandsynlighederne, hvis $k=1,1$ og osv. For alle mulige k 'er beregnes tilbagetrækningsandsynlighederne. Disse sandsynligheder angiver sandsynligheden for tilbagetrækning i hver hypotetisk tilbagetrækningsalder givet k og skrives som $P(r | k)$, hvor r angiver tilbagetrækningsalderen.

$P(r | k)$ afspejler nytten af at trække sig tilbage i hver alder. Hypotetiske tilbagetrækningsaldre, der har relativ stor nytte, har også stor sandsynlighed for tilbagetrækning, og den

alder, der har størst nytte, har også den største sandsynlighed. Omvendt hvis de økonomiske incitament er meget små, er sandsynligheden for tilbagetrækning i den pågældende alder meget lille.

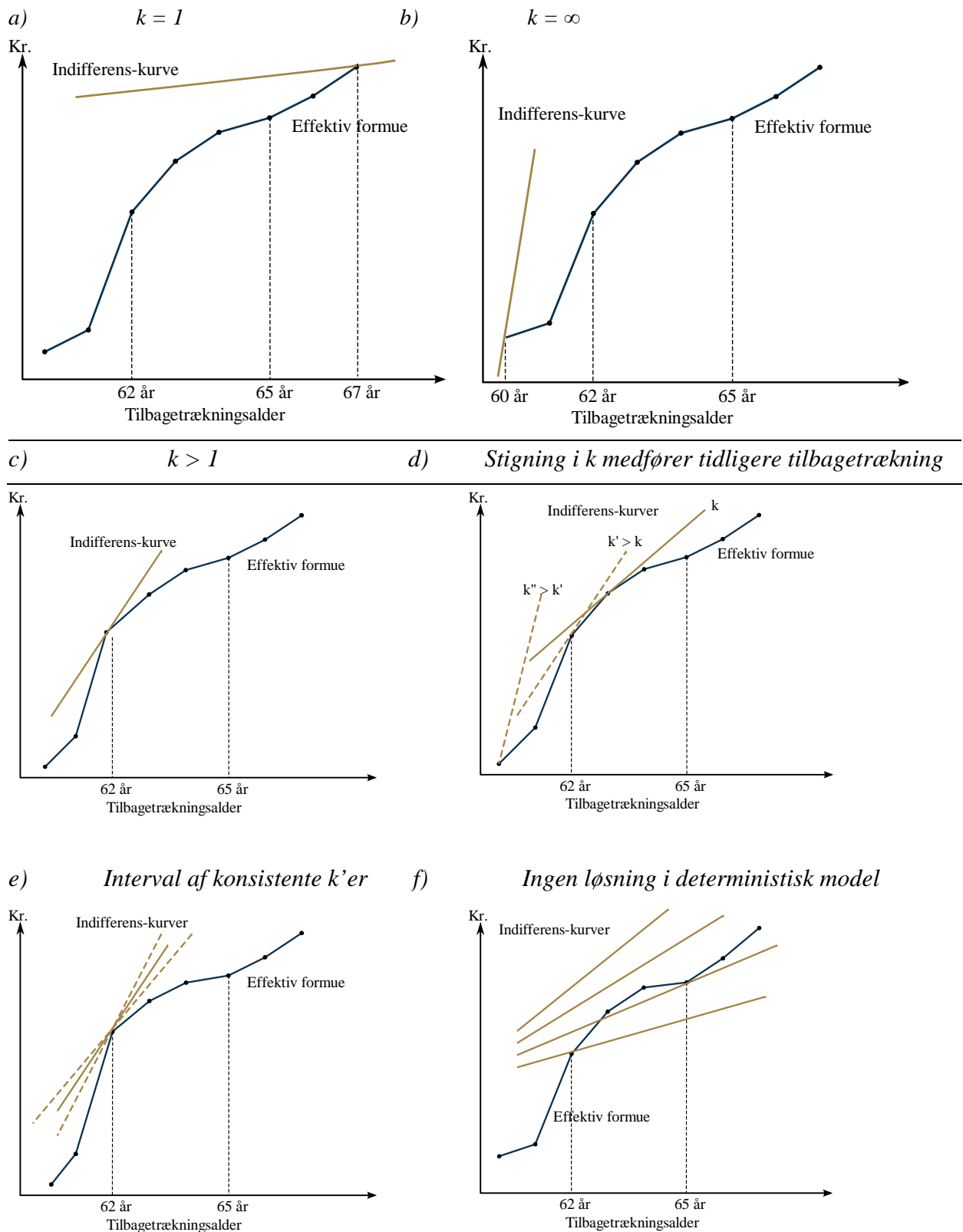
Trick: Sandsynlighed for et k givet den faktiske tilbagetrækningsalder udledes rekursivt

Det antages desuden, at k 'erne i befolkningen er trukket fra en fordeling. Økonometrikeren kender ikke de 59-åriges k 'er. Det er jo dem, vi ønsker at estimere. Men han kender de 59-åriges tilbagetrækningsalder. Da kan $P(r|k)$ 'vendes om', således at sandsynlighederne for hvert k givet den faktiske tilbagetrækningsalder beregnes. Disse benævnes $P(k|r)$. Konkret anvendes Bayes' regel til at udlede $P(k|r)$. Bayes' regel udnytter følgende viden: Hvis en person trækker sig tilbage sent, er det et tegn på lille k , og hvis han trækker sig tidligt, er det et tegn på stort k .

Nogle tilbagetrækningsalder er svære at finde løsninger for

Nogle tilbagetrækningsalder er svære at finde løsninger for. Hvis de finansielle incitament til tilbagetrækning er meget små, er det ikke altid muligt at finde k 'er, der er konsistente med den faktiske tilbagetrækningsalder. Dette er vist i eksemplet i figur 2.f. Det ses, at de finansielle incitament til at trække sig tilbage som 65-årige er meget små for den pågældende person. Effektive formue-grafen er konveks i dette punkt. Det er således ikke muligt at finde en indifferenskurve, der tangerer effektiv-formue-grafen i 65 år. I modellen uden uobserveret heterogenitet betyder det, at der ikke eksisterer et k , der er konsistent med, at personen trækker sig tilbage som 65-årig. I modellen med uobserveret heterogenitet er det derimod muligt at beregne sandsynligheden for alle k 'er, givet tilbagetrækningsalderen 65 år, idet sandsynligheden for den faktiske tilbagetrækningsalder også er bestemt af de ikke finansielle incitament – foruden de finansielle incitament.

Figur 2: Optimal tilbagetrækningsalder i tilbagetrækningsmodellen



Høj initialformue trækker i retning af tidlig tilbagetrækning

En persons initiale finansielle nettoformue er givet af den samlede pensionsopsparing, aktier, obligationer, indestående på bankkonti, ejendomsværdier mv. samt gæld. En stor initial finansiell nettoformue implicerer også en stor initial effektiv formue. Hvis denne er stor relativt til nettogevinsten af at forblive på arbejdsmarkedet, trækker det i retning af tidlig tilbagetrækning, jf. figur 3.a. F.eks. er en nettogevinst af at udskyde tilbagetrækning i ét år på fx 100.000 kr. relativt lille, hvis den initiale effektive formue er 10 mill. kr., men relativt stor, hvis den initiale effektive formue er 100.000 kr. Det finansielle incitament til at udskyde tilbagetrækning afhænger således af størrelsen på den initiale formue. Tilsvarende trækker relative store nettogevinster af at udskyde tilbagetrækning i retning af senere tilbagetrækning.

Skift i de finansielle incitamenter trækker i retning af tilbagetrækning i skifteåret...

Skift i de finansielle incitamenter hen over tilbagetrækningsalder trækker i retning af tilbagetrækning i skifteåret. Skift i de finansielle incitamenter opstår, hvis den finansielle nettogevinst af at udskyde tilbagetrækning er særligt stor for en bestemt tilbagetrækningsalder. Dette kan ses ved, at effektiv formue-kurven knækker i dette punkt, jf. figur 3.b. Modellen vil da forudsige, at tilbagetrækningen er koncentreret omkring alderen med særligt store finansielle incitamenter. Dette kan ses ved, at indifferenskurver med mange forskellige hældninger tangerer effektiv formue-kurven i den alder, hvor incitamenterne skifter.

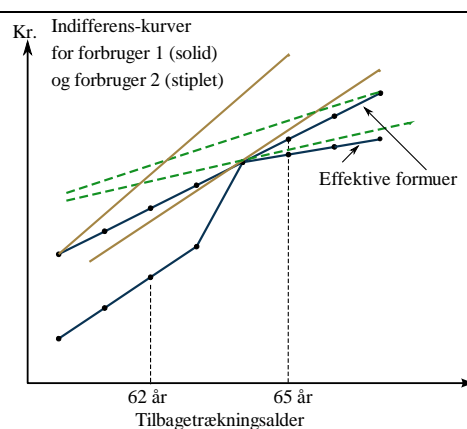
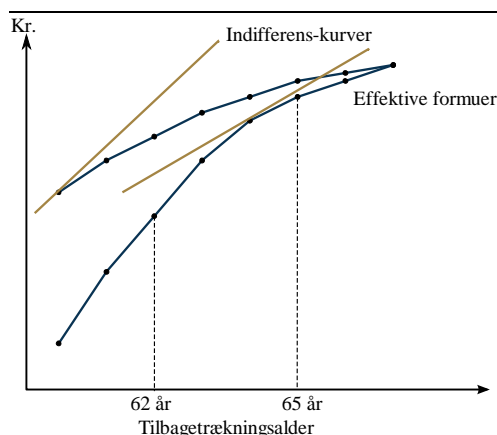
...men det modsatte kan også være tilfældet

Skift i de finansielle incitamenter hen over tilbagetrækningsalder kan dog også komme af, at den finansielle nettogevinst af at udskyde tilbagetrækning til en bestemt alder er særligt lille, jf. figur 3.c. Da vil modellen forudsige, at meget få trækker sig tilbage i den pågældende alder.

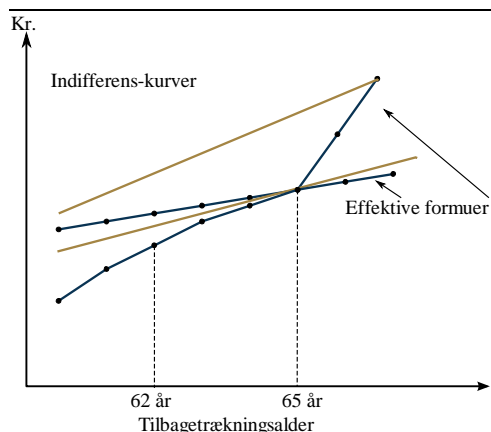
Figur 3: Optimal tilbagetrækningsalder i tilbagetrækningsmodellen

a) *Stor initialformue medfører b) Skift i de finansielle incitamenter ved tidlig tilbagetrækning*

en given tilbagetrækningsalder



c) *Skift i de finansielle incitamenter ved en given tilbagetrækningsalder*



Betydningen af ρ

Nyttefunktionen i tilbagetrækningsmodellen er en standard CES-nyttefunktion (jf. ligning 2 i næste afsnit), som har konstant relative risikoaversion (CRRA). Parameteren ρ er koefficienten for den relative risikoaversion, og $1/\rho$ angiver den intertemporale substitutionselasticitet (IES). Når $\rho = 0$, er forbrugernes nyttefunktion additiv. Forbrugeren har derfor ingen problemer med at give afkald på forbrug på kort sigt, bare der sker en kompensation senere. Lidt populært kan man sige, at forbrugeren har mottoet: ”hvis jeg ikke får mad i dag, kan jeg jo bare spise lidt mere imorgen”. Hvis omvendt $\rho = \infty$, da er nyttefunktionen limitationel. I dette tilfælde vil forbrugeren ikke acceptere nogen som helst variation i forbruget. Forbrugeren optimerer ved at vælge det konstante forbrugsniveau, der er muligt

givet den fremtidige indkomst-strøm, og man kan sige at forbrugeren udfører fuldstændig forbrugsudjævning.

Generelt angiver $\rho < 1$ lave præferencer for forbrugsudjævning, mens $\rho > 1$ angiver præference for forbrugsudjævning. Som tidligere nævnt er der konsensus for værdien $\rho = 2$, dvs. for at forbrugerene har en vis præference for forbrugsudjævning..

Lav værdi af ρ trækker i retning af sen tilbagetrækning

Når personen ikke tillægger *timing* af sit forbrug stor vægt, hvilket svarer til en værdi af ρ tæt på 0, indebærer det, at forbrugeren er mere tilbøjelig til at udskyde sin tilbagetrækning for også at kunne opnå et højt forbrugsniveau i fremtiden, end en person der tillægger fremtidigt forbrug relativt lidt nytte. Denne forbruger vægter fremtidige stigninger i forbruget højere end en forbruger med høje præferencer for forbrugsudjævning (stor værdi af ρ). Fremtidige finansielle nettogevinsten af at udskyde tilbagetrækning vægter derfor højere for forbrugeren med additiv nytte. Isoleret set implicerer det, at forbrugeren med additiv nytte opnår en større nyttegevinst af at udskyde tilbagetrækning end forbrugeren med høje præferencer for forbrugsudjævning.⁹

ρ 's værdi påvirker estimatet af k

Størrelsen på ρ har betydning for, hvilke k 'er, der er konsistente med den faktiske tilbagetrækningsalder - med andre ord estimatet af k . F.eks. antag at både forbrugeren med additiv nytte og forbrugeren med stærke præferencer for forbrugsudjævning trækker sig tilbage på samme tidlige tidspunkt. Eftersom forbrugeren med additiv nytte i forvejen forbinder nettogevinsten af at udskyde tilbagetrækning med større nytte end forbrugeren med høje præferencer for forbrugsudjævning, vil det kræve et større k for forbrugeren med additiv nytte, for at få det til at være konsistent med den tidlige tilbagetrækning, end for forbrugeren med høje præferencer for forbrugsudjævning.

ρ bestemmer krumningen på indifferenskurverne for forbrug

ρ bestemmer krumningen på indifferenskurverne for forbrug. Dette er beskrevet nærmere i afsnit 4.3

ϕ er en vægt for betydningen af de økonomiske incitamenter ift. de ikke-økonomiske incitamenter

⁹ Der antages perfekte kapitalmarkeder i modellen, så det er muligt at forbrugsudjævne. Diskonteringen af de fremtidige indkomster gør dog, at der er omkostninger forbundet med at fremrykke fremtidigt forbrug til nutiden.

Det antages, at der er uobserveret heterogenitet i modellen. Den uobserverede heterogenitet beskriver ikke-økonomiske incitament, der påvirker tilbagetrækningsbeslutningen. Den uobserverede heterogenitet er kendt af den 59-årige, men ikke af økonometrikeren. Den uobserverede heterogenitet kan opfattes som støj i modellen. Parameteren ϕ er en vægt for betydningen af de økonomiske incitament for valget af tilbagetrækningsalder ift. de ikke-økonomiske incitament.

Meget støj i modellen implicerer, at den forventede tilbagetrækning er lige fordelt i alle tilbagetrækningsår

En meget lille værdi af ϕ angiver, at de uobserverede ikke-økonomiske incitament har stor betydning for tilbagetrækningsbeslutningen. Det implicerer, at den forventede tilbagetrækning er lige fordelt i alle tilbagetrækningsår. Omvendt hvis ϕ er meget stor, betyder det, at tilbagetrækningen i stor grad kan forklares af de økonomiske incitament.

ϕ har betydning for effekten af politikker, der påvirker de finansielle incitament

Politikker, der påvirker de økonomiske incitament til at udskyde tilbagetrækningen, har lille effekt, hvis tilbagetrækningen i høj grad er bestemt af ikke-økonomiske incitament. Jo større betydning de økonomiske incitament har for tilbagetrækningsbeslutningen, jo større effekt vil de økonomiske politikker have.

Betydningen af ϕ afhænger af modellens øvrige parametre

ϕ er ikke normeret. Skalaen ϕ skal vurderes på, afhænger af modellens øvrige parametre. En værdi af ϕ på f.eks. 1 mill betyder relativt meget støj, hvis $\rho = 2$ og ekstremt lidt støj, når ρ er lig 1,5.

3.2. Model

En person skal beslutte sig for sin tilbagetrækningsalder. Det antages, at personen kender sine fremtidige økonomiske forhold (lønindkomst, rente, pensioner, offentlige overførsler osv.), men at der er usikkerhed med hensyn til levealder. Der antages perfekte kapitalmarkeder, så personen er ikke kreditrestrikeret. Den maksimale levealder er T . Beslutningen om tilbagetrækningsalder skal tages ved alder 0 (alder 0 svarer til 59 år) med udgangspunkt i personens kendskab til sine fremtidige økonomiske forhold. Informationerne om de fremtidige økonomiske forhold opdateres ikke efter alder 0, hvilket medfører, at valget af tilbagetrækningsalder ligger fast efter alder 0.

Der skal vælges en tilbagetrækningsalder i intervallet $1 \leq r \leq T_p$. I perioden T_p til T vil personen med sikkerhed være pensioneret. Nyttens som 0-årig, givet tilbagetrækningsalderen r , antages at være:

$$U_0(r) = \phi V_0(r) + \varepsilon_r \quad (1)$$

hvor $V_0(r)$ er den tilbagediskonteret forventede nytte af forbrug og fritid og ε_r er uobserverbar heterogenitet (den 59-årige kender ε_r - det gør økonometrikeren ikke). Parameteren ϕ angiver den vægt, der tillægges den deterministiske del af nyttefunktionen. $1/\phi$ kan også fortolkes som et udtryk for varians i det stokastiske led.

Der antages en standard CES-nyttefunktion. Den forventede nytte V_0 af at forbruge i alle fremtidige perioder er givet ved

$$V_0(r) = \sum_{s=1}^T \frac{(\gamma_s(r; k) c_s)^{1-\rho}}{1-\rho} \beta_s \quad (2)$$

hvor

$$\gamma_s(r; k) = \begin{cases} 1 & \text{for } s < r \\ k > 1 & \text{for } s \geq r \end{cases}$$

Parameteren k angiver den positive nytteeffekt af at trække sig tilbage, dvs. præferencer for fritid. Parameteren β_s er defineret ved:

$$\beta_t \equiv \prod_{s=0}^t \frac{1-\mu_s}{1+\theta}$$

hvor μ_s er dødssandsynligheden ved alder s og θ er den subjektive tidspræferencerate. Det antages at $\mu_T = 1$.

Parameteren ρ angiver præferencer for forbrugsudjævning over tid. Når $\rho = 0$ er nytten den samme uanset tidspunktet for forbrug – det svarer til additiv nytte. Generelt angiver $\rho < 1$ meget lave præferencer for forbrugsudjævning. Når $\rho = 2$ betyder det, at forbrugeren har størst nytte af et jævnt forbrug over tid. $\rho = \infty$ angiver Leontief-præferencer – dvs. at forbrugeren kun opnår nytte af et intertemporalt forbrug i et fast forhold. Afsnit 4.4 indeholder en mere detaljeret redegørelse for ρ 's betydning i modellen.

Forbrugeren står over for den intertemporale budgetrestriktionen

$$A_s = (1 + r_{s-1})A_{s-1} + y_s - c_s; \quad A_T = 0; \quad 0 < s < T \quad (3)$$

hvor A_s er finansiel formue, y_s er løbende indkomst, c_s er forbrug og r_s er rente på finansielle aktiver. Den løbende indkomst er givet ved:

$$y_s = y_s(r) = \begin{cases} Y_s & \text{for } s < r \\ B_s(r) & \text{for } s \geq r \end{cases}$$

hvor Y_s er erhvervsindkomst og $B_s(r)$ er pensionsudbetalinger givet tilbagetrækningstidspunktet r .

Lemma 1. *En forbruger der maksimerer nyttefunktionen (1) under budget-restriktionen (3) og som har den initiale formue A_0 ved alder 0, vil have den indirekte nyttefunktion:*

$$U_0(r; k) = \phi \frac{\hat{V}_0(r; k)^{1-\rho}}{1-\rho} + \varepsilon_r \quad (4)$$

hvor

$$\hat{V}_0(r; k) = \frac{A_0 + H_0(r)}{P_0(r; k)} \quad (5)$$

$H_0(r)$ og $P_0(r; k)$ er defineret ved

$$H_0(r) \equiv \sum_{s=1}^T y_s(r) R_s$$

$$P_0(r; k) \equiv \left[\sum_{s=1}^T \gamma_s(r; k)^{\frac{1-\rho}{\rho}} \beta_s^{\frac{1}{\rho}} R_s^{\frac{\rho-1}{\rho}} \right]^{\frac{\rho}{\rho-1}}$$

Tilbagediskonteringsfaktoren R_s er defineret ved

$$\begin{aligned} R_s &= \prod_{v=0}^s \frac{1}{1+i_v} \\ &= \prod_{v=0}^s \frac{1-\mu_v}{1+i} \end{aligned}$$

Bevis. Se appendiks Stephensen (2012)

Variablen $H_0(r)$ er indkomststrømmen tilbagediskonteret til alder 0, givet tilbagetrækningsalderen r . $H_0(r)$ svarer til de effektive formuer minus den initiale finansielle formue. Bemærk at tilbagediskonteringen sker med renten (dvs. uden inddragelse af dødssandsynligheder). $P_0(r; k)$ er et CES-prisindeks.

Det er muligt at estimere en strukturel model givet ved (4). For givne antagelser om fordelingen på ε_r kan k og ϕ og ρ estimeres. Antages ε_r at være extreme-value-fordelt beskriver (4) en logit-model. Hvis ε_r er normalfordelt fås en probit-model. Vi antager i det følgende at restledene er extreme-value-fordelte. Sandsynligheden for tilbagetrækning ved alder r er da givet ved logit-specifikationen:

$$P(r | k, \phi) = \frac{\exp\left(\phi \frac{\hat{V}_0(r; k)^{1-\rho}}{1-\rho}\right)}{\sum_{s=1}^{T_p} \exp\left(\phi \frac{\hat{V}_0(s; k)^{1-\rho}}{1-\rho}\right)} \quad (6)$$

Bemærk at

$$P(r | k, 0) = \frac{1}{T_p}$$

og at

$$\lim_{\phi \rightarrow \infty} P(r^* | k, \phi) = 1$$

hvor

$$r^* = \arg \max_{r \leq T_p} \frac{V_0(r; k)^{1-\rho}}{1-\rho} \quad (7)$$

Hvis $\phi = 0$ er valget af tilbagetrækningsår helt tilfældigt. Hvis omvendt $\phi = \infty$ er valget af tilbagetrækningsår helt deterministisk: det år vælges der maksimerer den indirekte nyttefunktion.

Bemærk desuden at

$$P(r | 1, \phi) = \frac{\exp\left(\frac{\phi}{1-\rho} \left(\frac{A_0 + H_0(r)}{P_0}\right)^{1-\rho}\right)}{\sum_{s=1}^{T_p} \exp\left(\frac{\phi}{1-\rho} \left(\frac{A_0 + H_0(s)}{P_0}\right)^{1-\rho}\right)} \quad (8)$$

og at

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P(1 | k, \phi) = 1$$

Hvis $k = 1$ (svarende til at nyttefunktionen er upåvirket af tilbagetrækningstidspunktet) er der en positiv sandsynlighed for alle tilbagetrækningsaldrer. Antages det at $H_0(r)$ er voksende i r (hvilket typisk vil være tilfældet), vil der være relativ lav sandsynlighed for tidlig tilbagetrækning, og relativ høj sandsynlighed for sen tilbagetrækning. Hvis omvendt $k = \infty$ (svarende til at tilbagetrækning giver et uendeligt stort hop i nyttefunktionen) ville alle trække sig så hurtigt som muligt - dvs. ved alder 1.

3.2.1 Det deterministiske tilfælde

Når $\phi = \infty$ er der ingen uobserveret heterogenitet. Den optimale tilbagetrækningsalder kan da findes ved at løse ligning (7) for givne værdier af k . Herefter findes de værdier for k , der er konsistente med den faktiske tilbagetrækningsalder.

3.2.2 Estimation af præference-fordeling

Antag nu at der er n forbrugere. Lad os antage, at vi i vores dataset har $d_j = (A_0^j, H_0^j(1), \dots, H_0^j(T_p), r_j)$, dvs. hypotetiske effektive formuer for hver tilbagetrækningsalder for hver forbruger, samt den faktiske tilbagetrækningsalder, $r_j \in \{1, \dots, T_p\}$. Sandsynligheden til tidspunkt 0 for at den j 'te forbruger trækker sig tilbage ved alderen r antages at være givet ved:

$$P_j(r | k, \phi) = \frac{\exp\left(\phi \frac{\hat{V}_0^j(r; k)^{1-\rho}}{1-\rho}\right)}{\sum_{s=1}^{T_p} \exp\left(\phi \frac{\hat{V}_0^j(s; k)^{1-\rho}}{1-\rho}\right)} \quad (9)$$

hvor

$$\hat{V}_0^j(r; k) = \frac{A_0^j + H_0^j(r)}{P_0(r; k)}$$

Forbruger j 's (den 59-åriges) hypotetiske effektive formuer for hver tilbagetrækningsalder er givet ved x_j :

$$x_j = (A_0^j + H_0^j(1), \dots, A_0^j + H_0^j(T_p))$$

Det ses, at (9) kan skrives som:

$$P_j(r|k) = \pi(r|k; \phi, x_j) \quad (10)$$

Vi antager nu, at x_j er trukket fra en fordeling, hvis tæthedsfunktion er $f(x)$, $x \in X$. På samme måde antages k_j at være trukket fra en fordeling, hvis tæthedsfunktion er givet ved $p(k)$, $k \geq 1$. Vi antager altså, at x_j og k_j er uafhængige. Og vi antager at forbrugerne kan have forskellige værdier af k -parameteren (dvs. at forbrugerne har forskellig direkte nytteeffekt af at trække sig tilbage). Hvor x_j er en observerbar parameter bestemt af objektive økonomiske forhold er k_j en ikke-observerbar nytteparameter. Det skal vises at vi for givet dataset $(d_j)_{j=1, \dots, n}$ og parameter ϕ kan udføre en ikke-parameterisk estimation af fordelingen $p(k)$.

I følge Bayes regel gælder det, at

$$P_j(k|r_j) = \frac{\pi(r_j|k; \phi, x_j) p(k)}{P(r_j; \phi, x_j)} \quad (11)$$

hvor

$$P(r_j; \phi, x_j) \equiv \int_1^{\infty} \pi(r_j|k; \phi, x_j) p(k) dk$$

Størrelsen $P_j(k|r_j)$ udnytter informationen om, hvad den j 'te forbruger faktisk gjorde ($r = r_j$) til at beregne en sandsynlighedsfordeling for hvad hans k_j var. $p(k)$ er den gennemsnitlige populationsfordeling, mens $P_j(k|r_j)$ er den betingede individuelle fordeling. Førstnævnte er fordelingen af præferencer i befolkningen, mens sidstnævnte angiver sandsynligheden for, at forbruger j har et givet k betinget af hans faktiske tilbagetrækningsalder. Hvis en forbruger trækker sig sent, kan det være et tegn på, at han har et lille k_j , og hvis han trækker sig tidligt, kan det være tegn på, at han har et højt k_j . Denne intuition gøres præcis via det Bayesianske approach beskrevet ved (11).

Hvis $P_j(k|r_j)$ kan bruges til at skønne over den enkeltes forbrugers k , kan gennemsnittet over alle forbrugeres $P_j(k|r_j)$ mon så ikke give et skøn over k 's fordeling i den relevante population? Det kan den faktisk:

Theorem 2. *Der er n forbrugere. Den j 'te forbrugers sandsynlighed for at trække sig tilbage ved alder r er givet ved (11). Vi antager at i) x_j er trukket fra en fordeling hvis tætheds-*

funktion er $f(x)$, $x \in X$, ii) k er trukket fra en fordeling hvis tæthedsfunktion er givet ved $p(k)$, $k \geq 1$. Det gælder da at

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n P_j(k | r_j) = p(k)$$

hvor $P_j(k|r_j)$ er defineret ved (11), hvis og kun hvis $P_j(k|r_j)$ er beregnet ud fra den korrekte populatoionsfordeling $p(k)$.

Bevis: se Stephensen (2012)

Umiddelbart ser theorem 2 lovende ud: vi kan beregne k 's fordeling $p(k)$ givet vores data og logit-antagelsen. Der er imidlertid et problem. Ifølge (11) skal vi kende $p(k)$ for at beregne $P_j(k|r_j)$. Theorem 2 kan derfor ikke bruges til at udpege $p(k)$ direkte, men kun til at opstille et fix-punkts problem, der har $p(k)$ som løsning. Det fremgår af theorem 2, at hvis man vælger en forkert populationsfordeling $\hat{P}(k) \neq p(k)$ i sin beregning af den betingede individuelle fordeling $P_j(k|r_j)$, da vil det gælde at

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n P_j(k | r_j) \neq \hat{p}(k) \quad (12)$$

3.2.3 Forecasting inden for estimationssamplet

Antag vi ændrer de individuelle finansielle karakteristika fra x_j til x'_j for alle j . Vi ønsker at beregne effekten af dette på tilbagetrækningsaldrene. For det enkelte individ er den betingede fordeling (11) det bedste bud vi har på den enkeltes k . Sandsynligheden for, at det enkelte individ trækker sig som r -årig er derfor

$$\begin{aligned} \text{prob}(r | x'_j) &= \int_1^{\infty} \pi(r | k; \phi, x'_j) P_j(k | r_j) dk \\ &= \int_1^{\infty} \pi(r | k; \phi, x'_j) \frac{\pi(r_j | k; \phi, x_j) p(k)}{P(r_j; \phi, x_j)} dk \end{aligned} \quad (13)$$

Det samlede antal tilbagetrukne ved alder r er givet ved:

$$N_r = \sum_{j=1}^n \text{prob}(r | x'_j) \quad (14)$$

3.2.4 Likelihood-funktion

Ved estimation af ϕ (og evt. ρ) er det nødvendig med en likelihood-funktion. Jvf. sidste afsnit kan vi beregne sandsynligheden for, at en person gjorde det han rent faktisk gjorde

$$prob(r_j | x_j; \phi) = \int_1^{\infty} \frac{\pi(r_j | k; \phi, x_j)^2 p_j(k; \phi | r_j)}{P(r_j; \phi, x_j)} dk$$

Bemærk at vi skriver den betingede fordeling som $p_j(k; \phi | r_j)$. Dette skyldes, at vores estimat af den betingede fordeling er for givent ϕ . Sandsynligheden for det givne data-set er

$$L = \prod_{j=1}^n prob(r_j | x_j; \phi)$$

således at vi får en log-likelihood-funktion:

$$LL = \sum_{j=1}^n \log \left(\int_1^{\infty} \frac{\pi(r_j | k; \phi, x_j)^2 p_j(k; \phi | r_j)}{P(r_j; \phi, x_j)} dk \right) \quad (15)$$

Parameteren ϕ skal vælges således, at denne funktion maksimeres.

3.2.5 Tilbagetrækning neutral ved lige store stigninger i indkomster og formue

Det bemærkes, at det i modellen er antaget, at tilbagetrækningen er homogen af 0. grad. Det betyder, at den optimale tilbagetrækningsalder er uændret, hvis erhvervsindkomsterne og den effektive formue stiger med lige mange procent. Dette implicer, at tilbagetrækningsalderen ikke påvirkes af, at samfundet som helhed bliver rigere (alle indkomster bliver lige meget større).

4. Estimation og resultater

I dette afsnit præsenteres resultater fra estimationer af tilbagetrækningsmodellen, jf. afsnit 3. Estimationerne tager udgangspunkt i registerdata for cohorten af 59-årige i 2001. Disse personer er født i 1942.

Tabel 4 viser resultaterne for en model, der er estimeret fælles for alle de 59-årige. Dvs. modellen antager, at populationsfordelingen $p(k; \phi)$ er fælles for alle grupper. Medianen af k er 1,57. Det svarer til, at nytten af én pensionskrone er henholdsvis 1,57 højere end af én krone i erhvervsindkomst.

ϕ er stor ($\phi = 8 \text{ mio.}$), hvilket indikerer at nytten og dermed tilbagetrækningen især er bestemt af de økonomiske incitament, jf. ligning (1).

Tabel 4: Estimationsresultater for fælles model for 59-årige i 2001

	<i>Estimater</i>
1. kvartil: $E[k]$	1,35
Median: $E[k]$	1,57
3. kvartil: $E[k]$	1,82
ϕ	8 mio.
Andel missing	54%
<i>Antal obs</i>	29.626

Anm. Modellen er estimeret for de beskæftigede 59-årige under et for $\sigma = 2$

Kilde: egne beregninger på registerdata

Fit til den faktiske tilbagetrækning

Modellen er relativt god til at forudsige den faktiske tilbagetrækning. Den forudsiger, at størstedelen af tilbagetrækningen klumper sig sammen ved aldrene 60 og 62 år, men den overvurderer tilbagetrækningen ved 60 år og 67 år og undervurderer tilbagetrækningen ved 62 år, jf. tabel 5. I det følgende undersøges modellens evne til at forudsige tilbagetrækningen for forskellige grupper.

Tabel 5 Forventet tilbagetrækning i modellen i pct.

	Faktisk	Forventet
60	31	30
61	4	3
62	26	19
63	8	6
64	4	4
65	10	7
66	4	12
67 eller senere	13	20

Anm.: Figuren angiver den faktiske og forventede tilbagetrækning blandt de beskæftigede 59-årige, når $\sigma=2$. Den forventede tilbagetrækning er beregnet vha. ligning (14)

Kilde: Egne beregninger på registerdata

4.1. Missing values og numeriske problemer

Der er en stor andel af missing values, jf. tabel 4. Godt halvdelen af observationen er udeladt fra estimationerne. De missing values kommer af, at modellen ikke kan udregne tilbagetrækningssandsynligheder for mange personer, jf. ligning (6). Derfor er disse personer i første omgang udeladt af beregningerne. Problemet er numerisk, som skyldes, at nævneren i ligning (6) kan blive så lille, at vores estimationsprogram ikke kan skelne den fra 0. Derfor kan tilbagetrækningssandsynligheden ikke udregnes og dermed heller ikke k . For de pågældende personer er de numeriske problemer begrænset til få værdier af k . For de fleste værdier af k , kan tilbagetrækningssandsynligheden godt beregnes.

Muligt at reparere af observationer med numeriske problemer

Det er muligt at reparere observationerne med numeriske problemer, således at de ikke udgår af estimationerne. Konkret antages det, at alle tilbagetrækningsaldrer er lige sandsynlige, når tilbagetrækningssandsynlighederne ikke kan estimeres for et givet k for en person. Eksempelvis, hvis tilbagetrækningssandsynlighederne for $k=1,32$ ikke kan beregnes for en person, antages det at tilbagetrækningssandsynligheden er $1/8$ for hver af tilbagetrækningsaldrerne for $k=1,32$. Tilbagetrækningssandsynlighederne for de øvrige k 'er reparerer ikke. $1/8$ er sandsynligheden for hvert af de 8 tilbagetrækningsår, når økonometrikeren ikke har mere information end at der er 8 udfald.

Økonometrisk mest efficient at reparere observationer med numeriske problemer

Det er mest efficient at reparere observationer med numeriske problemer, idet observationerne indeholder information, der beskriver tilbagetrækningsbeslutningen. Når der er numeriske problemer, gælder det kun enkelte k 'er for de pågældende personer. For de fleste k 'er kan tilbagetræknings sandsynlighederne estimeres.

Sammenfald mellem numeriske problemer og ingen konsistente k 'er i model uden uobserveret heterogenitet

De numeriske problemer opstår, når ϕ er stor, og antallet af missings øges, når værdien af ϕ øges. Et stort ϕ afspejler, at den uobserverede heterogenitet har lille betydning for tilbagetrækningsbeslutningen og de økonomiske incitament har stor betydning. Hvis ϕ er meget stor, er modellen tæt på den deterministiske model uden uobserveret heterogenitet.

Det huskes, at det ikke er muligt at finde k 'er, der er konsistente med den faktiske tilbagetrækningsalder i den deterministiske model, hvis de finansielle incitament til tilbagetrækning i den pågældende alder er meget små. Der er et delvist sammenfald mellem observationer med numeriske problemer i den stokastiske model og observationer, der ikke har løsninger for k i den deterministiske model uden uobserveret heterogenitet. Andelen af observationer med numeriske problemer er størst i gruppen af personer, for hvilke der ikke kan findes konsistente k 'er i den deterministiske model.

Dette indikerer, at de udeladte observationer ikke er tilfældigt fordelt i befolkningen, hvilket yderligere argumenterer for at reparere disse observationer. Resultaterne i de følgende afsnit tager udgangspunkt i modeller, hvor observationer med numeriske problemer reparerer.

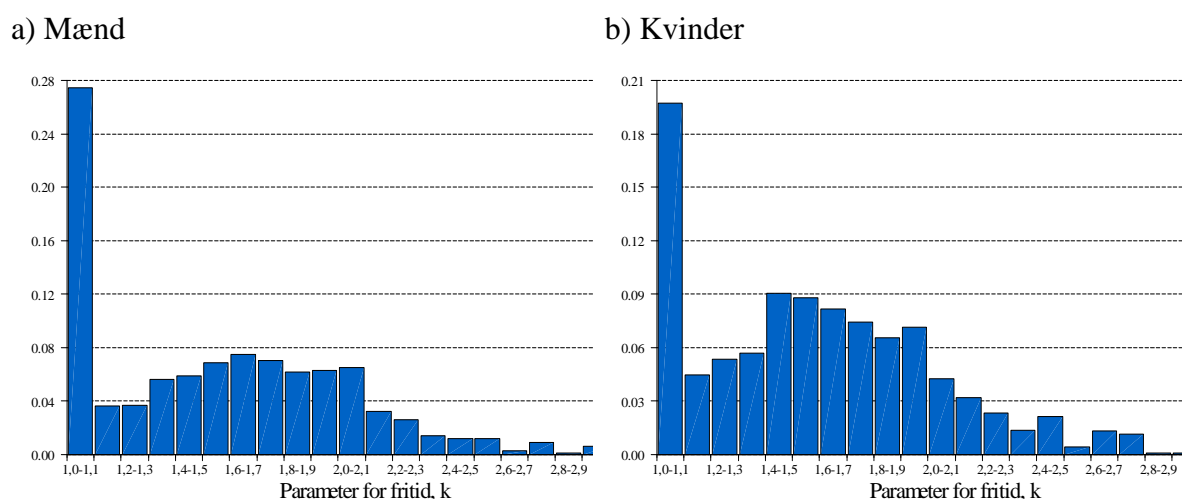
4.2. Præferencer for fritid varierer mellem køn- og uddannelsesgrupper

I dette afsnit præsenteres resultater fra 2 sæt af modeller. Det ene sæt af resultater er fra separate estimationer af modellen for mænd og kvinder. Dvs. det tillades, at populationsfordelingen ($p(k; \phi)$) er forskellig for mænd og kvinder. Det andet sæt af resultater er fra en model, hvor $p(k; \phi)$ tillades at være forskellig for både uddannelsesgrupper og mænd og kvinder. Resultater nedenfor er opnået ved maximum likelihood estimation af k og ϕ , jf. ligning (15). En anden forskel til de ovenfor præsenterede resultater er, at nedenstående modeller er estimeret for alle de beskæftigede 59-årige, idet observationer med numeriske problemer reparerer.

4.2.1 Køn

Figur 4 viser de estimerede populationsfordelinger for k for henholdsvis mænd og kvinder. Ud fra en gennemsnitsbetragtning har mænd lavere præferencer for fritid end kvinder. Dette kan også ses af tabel 5, der viser kvartilerne af de estimerede k 'er. For mænd er medianen af de estimerede k 'er 1,52. Det tilsvarende k for kvinder er 1,62.

Figur 4: Estimeret fordelinger af fritids-præferencer for 59-årige Mænd og Kvinder (populationsfordeling for k) SAR/figurer skal have samme skala



Anm. Figuren viser gennemsnitsfordelingen af præferencer for fritid for de 59-årige beskæftigede (populationsfordeling for k). Estimatet for ϕ er 8,5 mio. for begge uddannelsesgrupper egne beregninger på registerdata

Tabel 5: Estimationsresultater for kønsopdelte modeller for 59-årige i 2001

	<i>Estimeret</i>	
	<i>Mænd</i>	<i>Kvinder</i>
1. kvartil: $E[k]$	1,21	1,27
Median: $E[k]$	1,52	1,61
3. kvartil: $E[k]$	1,94	1,93
ϕ	8,5 mio.	8,5 mio.
Andel missing	0	0
<i>Antal obs</i>	<i>16.046</i>	<i>13.216</i>

Anm. Modellen er estimeret separat for mænd og kvinder ved maximum likelihood estimation, jf. ligning 15.

Det er antaget at $\sigma = 2$

Kilde: Egne beregninger på registerdata

God forudsigelse af tilbagetrækning

De estimerede modeller er generelt gode til at forudsige den faktiske tilbagetrækning for mænd og kvinder, jf. tabel 6. De er gode til at forudsige, at tilbagetrækningen klumper sig sammen omkring aldrene 60 og 62 år, samt at mange først trækker sig tilbage som 67-årige eller senere. Det skyldes, at de finansielle incitamenter til at trække sig tilbage i disse aldre er store. Det kan også ses af figur 1.1-1.4, at det er muligt at finde næsten lineære indifferenskurver, der tangerer disse tilbagetrækningsaldrer.

Bedste fit, hvor finansielle incitamenter er store

Tilbagetrækningen overvurderes en smule ved 60 og 66 år, mens den undervurderes en del ved 62 år. At tilbagetrækningen undervurderes ved 62 år hænger sammen med, at mange trækker sig tilbage i den alder, selvom de ikke har særlige økonomiske incitamenter til at vælge den tilbagetrækningsalder. Medlemmer af efterlønsordningen med en større pensionsopsparring har et særligt incitament til at udskyde tilbagetrækning til 62 år for derved at undgå, at pensionsopsparringen bliver modregnet i efterlønnen. Dette incitament har personer uden pensionsopsparring og ikke-efterlønsberettigede ikke. Alligevel vælger en del at trække sig tilbage i den alder.

Tabel 6 Forventet tilbagetrækning i modellen i pct.

	Mænd		Kvinder	
	Faktisk	Forventet	Faktisk	Forventet
60	21	27	40	43
61	4	5	5	5
62	27	15	24	12
63	9	7	7	6
64	4	6	4	6
65	11	8	9	8
66	5	9	2	7
67 eller senere	17	21	9	12

Anm.: Figuren angiver den faktiske og forventede tilbagetrækning blandt de beskæftigede 59-årige, når $\sigma=2$. Den forventede tilbagetrækning er beregnet vha. ligning (14)

Kilde: Egne beregninger på registerdata

4.2.2 Uddannelse og køn

I dette afsnit præsenteres resultater for separate estimationer af modellen opdelt på køn og uddannelse. Konkret er modellen blevet estimeret på 12 grupper. Det fremgår af tabel 7 samt appendiks A, at de estimerede fordelinger af k varierer en del hen over uddannelsesgrupperne. Der er ikke nogen entydig tendens til faldende k 'er med uddannelsesniveaue. De estimerede k 'er for ufaglærte mænd er relativt lave ($\text{median}(k)=1,41$). Omvendt er k 'erne relativt høje for ufaglærte kvinder.

Kvinder har lavere gevinst af at fortsætte på arbejdsmarkedet

De estimerede k 'er for mænd er enten lidt lavere eller på niveau med kvindernes, når der kontrolleres for uddannelse. Når kvinder trækker sig tidligere tilbage fra arbejdsmarkedet, skyldes det, udover at kvinder har højere præferencer for fritid, at kvinder har lavere økonomisk gevinst af at fortsætte med at arbejde, fordi de har lavere arbejdsindkomst end mænd.

Tabel 7 *Maksimum likelihood estimerede k 'er opdelt på køn og uddannelse (median af estimerede k 'er)*

	Mænd			Kvinder		
	1.	Median	3.	1.	Median	3.
Ukendt	1,26	1,57	1,91	1,33	1,70	1,82
Ufaglært	1,15	1,41	2,00	1,24	1,76	2,16
Faglært	1,22	1,48	1,94	1,25	1,54	1,84
KVU	1,28	1,56	1,92	1,32	1,46	1,89
MVU	1,38	1,64	1,95	1,33	1,55	1,90
LVU	1,29	1,53	1,82	1,34	1,59	1,82

Anm: Estimererne er fundet ved maksimum-likelihood estimation for $\rho=2$. De forventede k 'er er bereg-

Kilde: net ved hjælp af ligning (11)

Egne beregninger på registerdata

Tabel 8 viser Maksimum Likelihood-estimererne af ϕ . Generelt fås ret store ϕ -estimerer, hvilket indikerer, at tilbagetrækningen primært bestemmes af de økonomiske incitamer. Undtagelserne er mænd og kvinder med lange videregående uddannelser. For disse højtuddannede påvirker de observerede ikke-økonomiske incitamer i højere grad tilbagetrækningsbeslutningen.

Tabel 8: Estimerede ϕ -værdier

	Mænd	Kvinder
Ukendt	8 mio.	8 mio.
Ufaglært	8,5 mio.	8,5 mio.
Faglært	9 mio.	8,5 mio.
KVU	9 mio.	10,5 mio.
MVU	9,5 mio.	10,5 mio.
LVU	6,5 mio.	6 mio.

Anm. Estimerterne er fundet ved maksimum-likelihood estimation for $\rho=2$.

Egne beregninger på registerdata

Generelt god forudsigelse af tilbagetrækning....

De uddannelses- og kønsopdelte modeller er generelt gode til at forudsige den faktiske tilbagetrækning – herunder at tilbagetrækningen er koncentreret om årene 60, 62 og evt. 67 år eller senere, jf. tabel 9.a. og 9.b.

.... men tilbagetrækning ved 62 år undervurderes for grupper med lav pensionsopsparing

En del ufaglærte og faglærte mænd trækker sig tilbage som 62-årige, hvilket de estimerede modeller undervurderer. De ufaglærte og faglærte havde generelt små pensionsopsparinger i 2001, hvilket reducerer de økonomiske incitamentter til at udskyde tilbagetrækning til 62 år (for at undgå modregning af pensionsopsparing i efterlønnen). At modellen undervurderer tilbagetrækningen ved 62 år for de ufaglærte og de faglærte, skyldes således, at mange trækker sig tilbage som 62-årige, selv om der ikke er en særlig ø fordel ved at vælge lige netop den alder.

God forudsigelse af tilbagetrækning for mænd med lange og mellemlange videregående uddannelser

De estimerede modeller er gode til at forudsige tilbagetrækningen for personer med videregående uddannelser, jf. tabel 9.a. og 9.b. Det gælder især, at tilbagetrækningen er koncentreret om aldrene 60, 62 og 67 år eller senere. Disse grupper havde pæne pensionsopsparinger i 2001, hvilket gør det økonomiske fordelagtigt at udskyde tilbagetrækningen til 62 år for at undgå at pensionsopsparing modregnes i efterlønnen. Tendensen til at undervurdere tilbagetrækningen ved 62 år er derfor meget mindre for disse grupper sammenlignet med de ufaglærte og de faglærte.

Bedst fit, hvor finansielle incitamentter er store

Generelt er de estimerede modeller gode til at forudsige, at tilbagetrækningen klumper sig sammen omkring aldrene 60 og 62 år, samt at mange først trækker sig tilbage som 67-årige eller senere. Det skyldes, at de finansielle incitamentter til at trække sig tilbage i disse aldre

er store. Det kan også ses af figur 1.a-1.d, at det er muligt at finde indifferenskurver, der tangerer disse tilbagetrækningsaldrer.

Tabel 9.a Faktisk og forventet tilbagetrækning for 59-årige mænd i 2001 (pct.)

Tilbagetrækningsalder	Ukendt		Ufaglært		Faglært		KVU		MVU		LVU	
	Faktisk	Forv	Faktisk	Forv	Faktisk	Forv	faktisk	forv	Faktisk	forv	faktisk	forv
60	15	22	28	32	23	28	17	23	12	17	5	10
61	2	6	5	7	4	6	5	5	3	3	1	2
62	27	14	26	11	31	16	27	18	23	21	14	14
63	10	8	8	8	9	8	10	8	11	8	13	6
64	7	7	3	7	4	7	4	7	6	6	5	5
65	11	9	11	9	11	8	11	8	15	8	12	8
66	7	9	4	9	5	9	5	9	6	10	8	11
67	21	25	14	17	14	17	21	23	24	27	41	44
Andel												
Missing	0		0		0		0		0		0	
Antal obs.	278		4950		7374		592		1686		1176	

Anm. Tabellen viser den faktiske og forventede tilbagetrækning ved de estimerede fordelinger for k ved log likelihood estimation. Den forventede tilbagetrækning er beregnet vha. ligning (14). ρ er sat til at være 2.

Kilde: egne beregninger på registerdata

Tabel 9.b Faktisk og forventet tilbagetrækning for 59-årige kvinder i 2001 (pct.)

Tilbagetrækningsalder	Ukendt		Ufaglært		Faglært		KVU		MVU		LVU	
	Faktisk	Forv	Faktisk	Forv	faktisk	Forv	faktisk	forv	Faktisk	forv	Faktisk	forv
60	32	36	48	49	38	42	29	31	32	35	12	17
61	3	4	6	5	5	5	5	6	4	5	2	2
62	22	12	22	9	26	13	22	16	28	19	16	16
63	10	7	6	6	8	7	9	8	9	7	10	6
64	5	6	3	6	3	6	3	7	5	6	8	5
65	12	11	7	8	9	8	13	9	11	8	14	9
66	3	7	2	7	2	7	4	9	2	8	7	10
67	14	17	7	10	9	12	15	15	8	12	30	35
Andel												
Missing	0		0		0		0		0		0	
Antal obs.	189		5254		5226		502		1635		410	

Anm. Se anmærkning til tabel 9.a

Kilde: Egne beregninger på registerdata

I tabel 10 nedenfor er tilbagetrækningen vægtet sammen til en aggregeret tilbagetrækning for alle. De kønsopdelte modeller giver den samme aggregerede forventede tilbagetrækning som de køns- og uddannelsesopdelte modeller.

Tabel 10 Sammenligning af fit: kønsopdelt model samt køn og uddannelsesopdelt model

Tilbageføringsalder	Faktisk	Modelberegnet	
	Faktisk	Køn	Køn og uddannelses
60	30	35	34
61	5	5	5
62	26	14	14
63	8	7	7
64	4	6	6
65	10	8	8
66	4	8	8
67	14	17	17

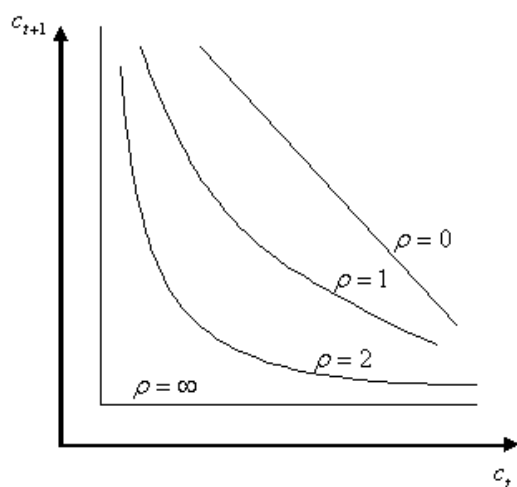
Anm. Se anmærkning til tabel 9.a

Kilde: Egne beregninger på registerdata

4.3. Relativ risikoaversion over tid (ρ) og indifferenskurvernes krumning

Som nævnt er nyttefunktionen i modellen er en standard CES-nyttefunktion (jf. ligning 2), der har konstant relativ risikoaversion (CRRA). Parameteren ρ er koefficienten for den relative risikoaversion, og $1/\rho$ angiver den intertemporale substitutionselasticitet (IES). Indifferenskurverne for forbrug er mere krumme jo større værdi af ρ , jf. figur 4 nedenfor.

Figur 4: Indifferencekurve forbrug



Anm. Krumningen på kurverne er ikke numerisk rigtige, men blot ment som illustration af, at større ρ er ensbetydende med mere krumning.

Krumme præferencer for forbrug, men Linære præferencer for tilbagetrækning

Tilbagetrækningsmodellen antager, at forbrugeren ikke er kreditrestrikteret. Det betyder, at tidspunktet for udbetaling af indkomster har lille betydning for nytteniveauet, fordi muligheden for at låne, gør det muligt at forbrugsudjævne. Der vil dog være omkostninger forbundet med at låne til forbrugsudjævning. Indifferenskurverne for tilbagetrækning er tilnærmelsesvis lineære, ligesom det er vist i figur 2 og 3 tidligere i dette afsnit. Dette er uanset værdien af ρ . Præferencer for forbrugsudjævning, dvs. ρ , har lille betydning for krumningen på indifferenskurverne for tilbagetrækning, fordi modellens forbruger altid har mulighed for at forbrugsudjævne.

Der er blevet gennemført nogle simuleringer af indifferenskurven for tilbagetrækning for forskellige værdier af ρ . Simuleringerne viser, at indifferenskurverne er tilnærmelsesvis lineære uanset værdien af ρ , når k er mindre end 3. Men når k er større end 3 varierer krumningen med ρ . Det skal her understreges, at $k=3$ afspejler ekstreme præferencer for fritid. Det betyder, at en pensionskrone giver 3 gange så høj nytte som en lønkrone. Simuleringerne er vist i appendiks C.

4.4. Estimationsresultater for alternative grader af risikoaversion over tid (ρ)

I dette afsnit præsenteres estimationsresultater for alternative værdier af ρ . Foruden $\rho=2$, er modellen også blevet estimeret for $\rho = [1,1; 1,5; 1,9]$. Tabel 10 viser de estimerede præferencer for fritid (k 'er) for de udvalgte værdier af ρ . Tabellen viser medianerne, mens kvartilerne er vist i appendiks b.1.

k 'estimer falder, når ρ stiger.

Der er en tendens til, at de estimerede k 'er stiger, når ρ falder. Dette skyldes, at personer med lave grader af risikoaversion (lave ρ 'er) er mere tilbøjelige til at udskyde deres tilbagetrækning for også at kunne opnå et højt forbrugsniveau i fremtiden end personer, der tillægger fremtidigt forbrug relativt lidt nytte (høje ρ 'er). For personer med lave grader af risikoaversion vil tidlig tilbagetrækning afspejle højere præferencer for fritid end for personer med høj risikoaversion.

Tabel 10: Maximum Likelihood estimerede k 'er for udvalgte værdier af ρ (Median(k))

	Median									
	$\rho = 0.5$		$\rho = 1.1$		$\rho = 1.5$		$\rho = 1.9$		$\rho = 2.0$	
	Mand	Kvinde	Mand	Kvinde	Mand	Kvinde	Mand	Kvinde	Mand	Kvinde
Ukendt			1,74	1,83	1,66	1,77	1,52	1,60	1,57	1,70
Ufaglært			1,73	2,07	1,49	1,86	1,41	1,75	1,41	1,76
Faglært			1,81	1,91	1,57	1,64	1,47	1,53	1,48	1,54
KVU			1,85	1,76	1,67	1,55	1,56	1,48	1,56	1,46
MVU			1,90	1,93	1,75	1,62	1,59	1,57	1,64	1,55
LVU			1,57	1,72	1,54	1,63	1,46	1,48	1,53	1,59

Anm. Estimerterne er fundet ved maksimum-likelihood estimation.

Egne beregninger på registerdata

Ikke entydigt, hvilke modeller der forudsiger tilbagetrækning bedst

Tabel 11a og 11b nedenfor viser den faktiske og forventede tilbagetrækning for de forskellige værdier af ρ for faglærte mænd og kvinder med en mellemlang videregående uddannelse. De øvrige grupper er vist i appendiks b.2. Det er ikke noget entydigt billede mht., hvilke af modellerne der forudsiger tilbagetrækningen bedst. Modellerne for intervallet $\rho = [1,1 \text{ til } 2]$ giver nogenlunde ens forudsigelse af tilbagetrækningen.

Tabel 11a: Faktisk og forventet tilbagetrækning for 59-årige for forskellige værdier af ρ : -
Faglærte mænd i 2001 (pct.),

Mænd, faglært

Tilbagetrækningsalder	Faktisk	Forventet				
		$\rho = 0.5$	$\rho = 1.1$	$\rho = 1.5$	$\rho = 1.9$	$\rho = 2.0$
60	23		26	29	26	28
61	4		11	6	7	6
62	31		13	15	16	16
63	9		10	8	9	8
64	4		9	7	8	7
65	11		9	8	9	8
66	5		10	9	9	9
67	14		12	18	16	17

Anm. Tabellen viser den faktiske og forventede tilbagetrækning ved de estimerede fordelinger for k ved log likelihood estimation. Den forventede tilbagetrækning er beregnet vha. ligning (14).

Kilde: egne beregninger på registerdata

Tabel 11b: Faktisk og forventet tilbagetrækning for 59-årige for forskellige værdier af ρ : -
Mellemlang videregående uddannelse, kvinder i 2001 (pct.),

Kvinder, MVU

Tilbage- træknings- alder	Faktisk	Forventet				
		$\rho = 0.5$	$\rho = 1.1$	$\rho = 1.5$	$\rho = 1.9$	$\rho = 2.0$
60	32		34	36	36	35
61	4		10	5	5	5
62	28		15	18	19	19
63	9		9	7	7	7
64	5		7	6	6	6
65	11		8	8	8	8
66	2		8	8	8	8
67	8		9	12	12	12

Anm. Se anmærkning til tabel 11.a

Kilde: Egne beregninger på registerdata

5. Fremskrivning af arbejdsstyrke og konsekvensberegninger

Den estimerede præferencer for fritid anvendes til at fremskrive tilbagetrækningen for seniorer i 2032 og for seniorer i 2047, jf. Dansk Økonomi, forår 2013 afsnit III.6. Modellen anvendes også til at foretage en række beregninger, der illustrerer betydningen af ændrede økonomiske incitamenter til tilbagetrækning, jf. Dansk Økonomi, forår 2013 afsnit III.7.

Referencer:

De Økonomiske Råd (2013): *Dansk Økonomi, forår 2013*.

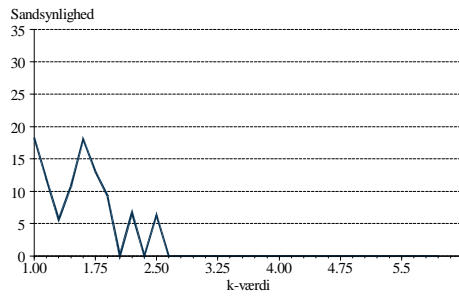
Stephensen, Peter (2012): *Model for tilbagetrækning med forbrugs-smoothing*. DREAM-notat

Stock, James H. & David A. Wise (1990): *Pensions, the Option Value of Work, and Retirement*. *Econometrica*, Vol. 58, No. 5

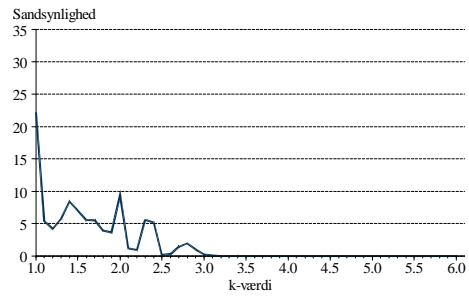
Train, Kenneth (2007): *A Recursive Estimator for Random Coefficient Models*. Working Paper. University of California, Berkeley

Appendiks A

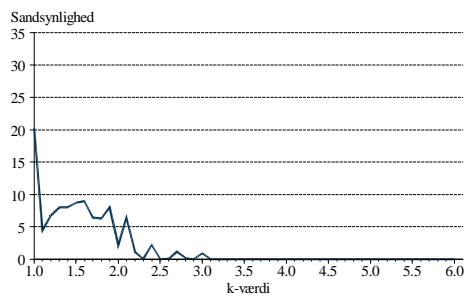
Figur Kvinder ukendt



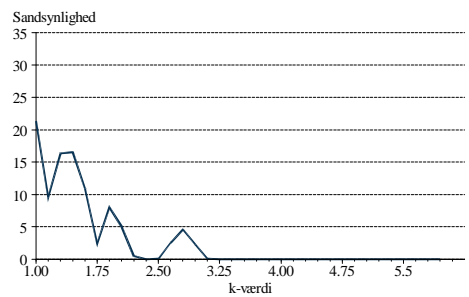
Figur Kvinder ufaglært



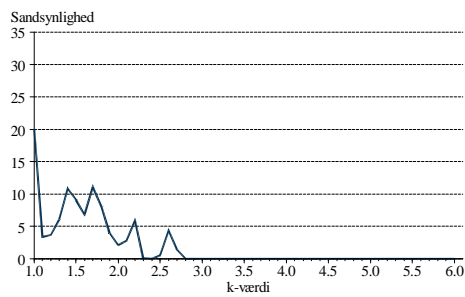
Figur Kvinder faglært



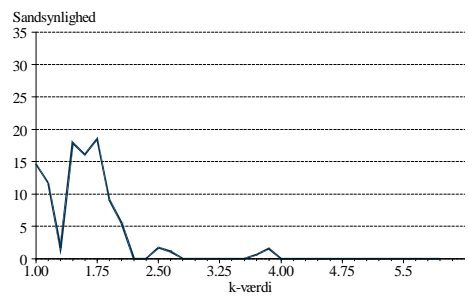
Figur Kvinder KVV



Figur Kvinder MVU



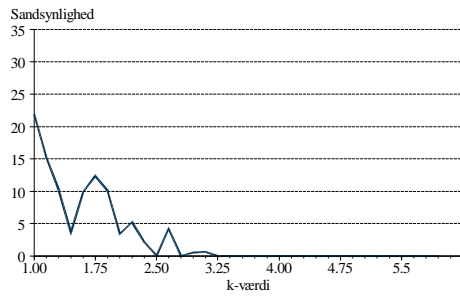
Figur Kvinder LVU



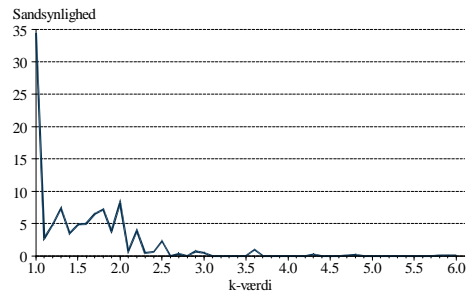
Anm.:

Kilde:

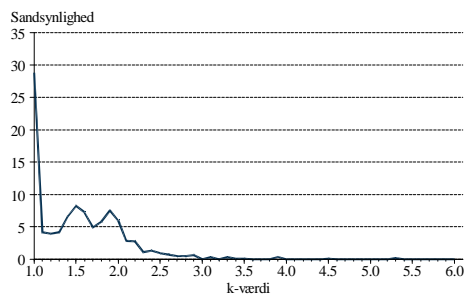
Figur Mænd ukendt



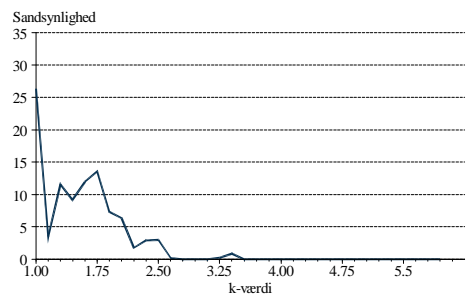
Figur Mænd ufaglært



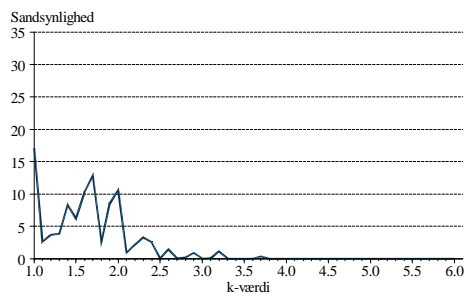
Figur Mænd faglært



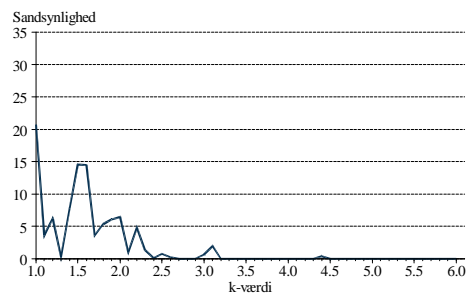
Figur Mænd KVU



Figur Mænd MVU



Figur Mænd LVU



Anm.:

Kilde:

Appendiks B.1: Estimer af k for forskellige ρ -værdier

- tallene skal opdateres med nyeste modelversion

	Kvartiler (Mænd)			Kvartiler (Kvinder)		
	$\rho = 0.5$			$\rho = 0.5$		
	1.	Median	3.	1.	Median	3.
Ukendt						
Ufaglært						
Faglært						
KVU						
MVU						
LVU						
	$\rho = 1.1$			$\rho = 1.1$		
	1.	Median	3.	1.	Median	3.
	Ukendt	1,55	1,74	2,15	1,64	1,83
Ufaglært	1,49	1,73	2,66	1,70	2,07	2,39
Faglært	1,59	1,81	2,27	1,64	1,91	2,22
KVU	1,63	1,85	2,17	1,57	1,76	2,37
MVU	1,50	1,90	2,27	1,72	1,93	2,29
LVU	1,24	1,57	2,01	1,36	1,72	1,96
	$\rho = 1.5$			$\rho = 1.5$		
	1.	Median	3.	1.	Median	3.
	Ukendt	1,28	1,66	2,02	1,35	1,77
Ufaglært	1,16	1,49	2,11	1,27	1,86	2,05
Faglært	1,24	1,57	2,04	1,29	1,64	1,88
KVU	1,33	1,67	2,11	1,31	1,55	1,95
MVU	1,44	1,75	2,12	1,38	1,62	2,01
LVU	1,28	1,54	1,87	1,36	1,63	1,90
	$\rho = 1.9$			$\rho = 1.9$		
	1.	Median	3.	1.	Median	3.
	Ukendt	1,32	1,74	1,86	1,31	1,60
Ufaglært	1,27	1,73	2,16	1,28	1,75	2,50
Faglært	1,28	1,81	1,95	1,29	1,53	1,93
KVU	1,30	1,85	1,93	1,30	1,48	1,88
MVU	1,37	1,90	1,88	1,32	1,57	1,92
LVU	1,24	1,57	1,70	1,32	1,48	1,69

	$\rho = 2.0$			$\rho = 2.0$		
	1.	Median	3.	1.	Median	3.
Ukendt	1,26	1,57	1,91	1,33	1,70	1,82
Ufaglært	1,15	1,41	2,00	1,24	1,76	2,16
Faglært	1,22	1,48	1,94	1,25	1,54	1,84
KVU	1,28	1,56	1,92	1,32	1,46	1,89
MVU	1,38	1,64	1,95	1,33	1,55	1,90
LVU	1,29	1,53	1,82	1,34	1,59	1,82

Appendiks B.2: Faktisk og forventet tilbagetrækning for forskellige ρ -værdier

- tallene skal opdateres med nyeste modelversion

Mænd, UKENDT

Tilbagetrækningsalder	Faktisk	Forventet				
		$\rho = 0.5$	$\rho = 1.1$	$\rho = 1.5$	$\rho = 1.9$	$\rho = 2.0$
60	15		19	22	19	22
61	2		9	6	8	6
62	27		12	14	16	14
63	10		10	8	9	8
64	7		10	8	9	7
65	11		10	9	10	9
66	7		12	10	10	9
67	21		18	25	21	25

Mænd, ufaglært

Tilbagetrækningsalder	Faktisk	Forventet				
		$\rho = 0.5$	$\rho = 1.1$	$\rho = 1.5$	$\rho = 1.9$	$\rho = 2.0$
60	28		30	33	30	32
61	5		11	6	8	7
62	26		11	11	12	11
63	8		9	8	9	8
64	3		9	7	8	7
65	11		9	9	9	9
66	4		10	9	9	9
67	14		12	18	15	17

Mænd, faglært

Tilbagetrækningsalder	Faktisk	Forventet				
		$\rho = 0.5$	$\rho = 1.1$	$\rho = 1.5$	$\rho = 1.9$	$\rho = 2.0$
60	23		26	29	26	28
61	4		11	6	7	6
62	31		13	15	16	16
63	9		10	8	9	8
64	4		9	7	8	7
65	11		9	8	9	8
66	5		10	9	9	9
67	14		12	18	16	17

Mænd, KVV

Tilbage­træk­ningsalder	Faktisk	Forventet				
		$\rho = 0.5$	$\rho = 1.1$	$\rho = 1.5$	$\rho = 1.9$	$\rho = 2.0$
60	17		22	25	23	23
61	5		9	4	5	5
62	27		12	16	18	18
63	10		9	8	8	8
64	4		8	6	7	7
65	11		9	8	8	8
66	5		12	10	9	9
67	21		18	24	22	23

Mænd, MVU

Tilbage­træk­ningsalder	Faktisk	Forventet				
		$\rho = 0.5$	$\rho = 1.1$	$\rho = 1.5$	$\rho = 1.9$	$\rho = 2.0$
60	12		16	18	16	17
61	3		7	3	5	3
62	23		14	19	21	21
63	11		9	8	9	8
64	6		8	6	7	6
65	15		9	8	9	8
66	6		13	10	10	10
67	24		23	28	24	27

Mænd, LVU

Tilbage­træk­ningsalder	Faktisk	Forventet				
		$\rho = 0.5$	$\rho = 1.1$	$\rho = 1.5$	$\rho = 1.9$	$\rho = 2.0$
60	5		9	9	9	10
61	1		4	2	3	2
62	14		9	14	15	14
63	13		7	6	7	6
64	5		7	6	6	5
65	12		10	8	9	8
66	8		16	11	11	11
67	41		38	43	40	44

Kvinder, UKENDT

Tilbage­træk­ningsalder	Faktisk	Forventet				
		$\rho = 0.5$	$\rho = 1.1$	$\rho = 1.5$	$\rho = 1.9$	$\rho = 2.0$
60	32		33	37	34	36
61	3		9	4	5	4
62	22		11	11	13	12
63	10		9	7	8	7
64	5		9	7	7	6
65	12		9	10	10	11
66	3		9	8	8	7
67	14		11	17	16	17

Kvinder, ufaglært

Tilbage­træk­ningsalder	Faktisk	Forventet				
		$\rho = 0.5$	$\rho = 1.1$	$\rho = 1.5$	$\rho = 1.9$	$\rho = 2.0$
60	48		50	51	49	49
61	6		10	5	6	5
62	22		9	9	9	9
63	6		6	6	7	6
64	3		6	6	6	6
65	7		6	7	7	8
66	2		6	7	7	7
67	7		7	10	9	10

Kvinder, faglært

Tilbage­træk­ningsalder	Faktisk	Forventet				
		$\rho = 0.5$	$\rho = 1.1$	$\rho = 1.5$	$\rho = 1.9$	$\rho = 2.0$
60	38		41	44	40	42
61	5		11	5	6	5
62	26		11	12	13	13
63	8		8	7	7	7
64	3		7	6	7	6
65	9		7	7	8	8
66	2		7	7	8	7
67	9		9	12	11	12

Kvinder, KVVU

Tilbageetræk- ningsalder	Faktisk	Forventet				
		$\rho = 0.5$	$\rho = 1.1$	$\rho = 1.5$	$\rho = 1.9$	$\rho = 2.0$
60	29		31	34	32	31
61	5		9	5	5	6
62	22		13	15	16	16
63	9		9	7	7	8
64	3		8	6	7	7
65	13		8	8	9	9
66	4		9	9	9	9
67	15		13	17	16	15

Kvinder, MVU

Tilbageetræk- ningsalder	Faktisk	Forventet				
		$\rho = 0.5$	$\rho = 1.1$	$\rho = 1.5$	$\rho = 1.9$	$\rho = 2.0$
60	32		34	36	36	35
61	4		10	5	5	5
62	28		15	18	19	19
63	9		9	7	7	7
64	5		7	6	6	6
65	11		8	8	8	8
66	2		8	8	8	8
67	8		9	12	12	12

Kvinder, LVU

Tilbageetræk- ningsalder	Faktisk	Forventet				
		$\rho = 0.5$	$\rho = 1.1$	$\rho = 1.5$	$\rho = 1.9$	$\rho = 2.0$
60	12		14	17	14	17
61	2		6	2	5	2
62	16		11	15	18	16
63	10		8	7	8	6
64	8		8	6	7	5
65	14		10	9	9	9
66	7		14	10	9	10
67	30		29	34	30	35

Appendiks C: Simuleringer af indifferenskurven for tilbagetrækning

Der er blevet gennemført simuleringer af indifferenskurven for tilbagetrækning. Overordnet viser simuleringerne, at indifferenskurverne er tilnærmelsesvis lineære uanset værdien af ρ , når k er mindre end 3 (evt. 4). Men når k er stor varierer krumningen med ρ . Det redegøres der for i det følgende:

Indifferenskurvers krumning er givet af CES-prisindekset, $P_0(r,k)$

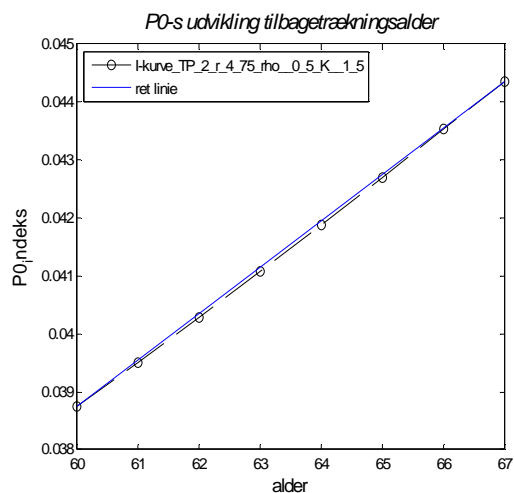
I det følgende præsenteres simuleringer af CES-prisindekset, $P_0(r,k)$, hen over tilbagetrækningsalderen. Indifferenskurven for tilbagetrækning er givet ved $\bar{U}P_0(r,k)$, hvor \bar{U} er det konstante nytteniveau. Således er indifferenskurvernes krumning bestemt af $P_0(r,k)$.

Figur D.1 nedenfor viser $P_0(r,k)$ for middelstore værdier af k (1,5 og 2) og for $\rho = [0,5; 1,5; 2]$.¹⁰ Desuden er indtegnet en ret blå linie at sammenligne med, så man bedre kan danne sig et indtryk af $P_0(r,k)$'s krumning. Det ses, at $P_0(r,k)$ er tilnærmelsesvis lineær for alle de valgte ρ -værdier. Dermed er indifferenskurven også tilnærmelsesvis lineær.

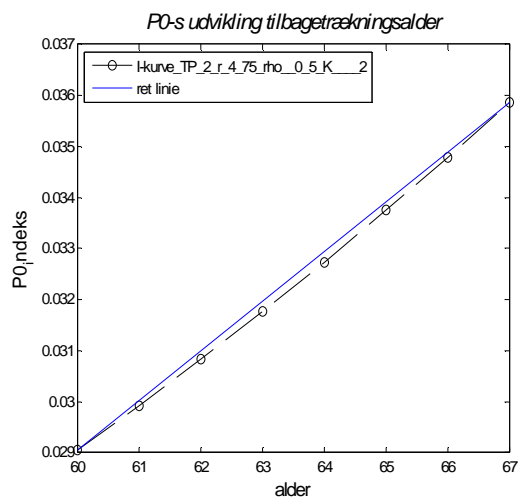
¹⁰ $k=1,5$ og $k=2$ er valgt, fordi medianerne og middelværdierne af de estimerede k 'er ligger i intervallet 1,5 og 2.

Figur C.1: Indifferenskurver (CES-prisindeks, $P_0(r,k)$) for udvalgte værdier af ρ og k
 - graferne skal opdateres med nyeste modelversion

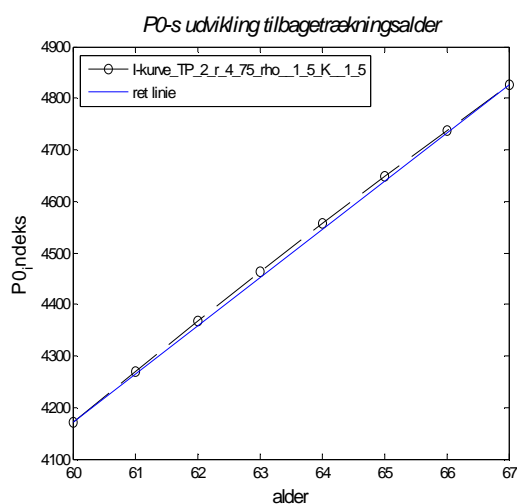
A: $\rho = 0,5$ og $k=1,5$



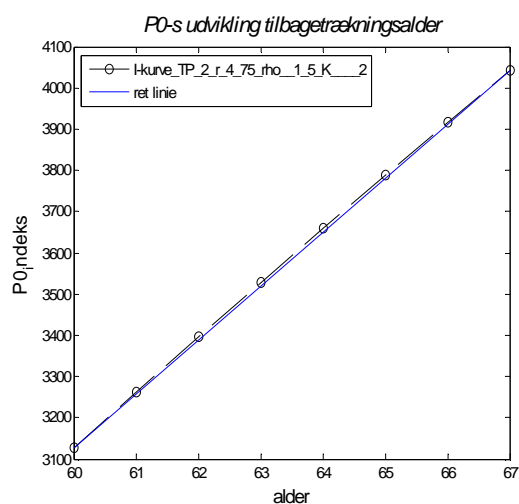
B: $\rho = 0,5$ og $k=2$



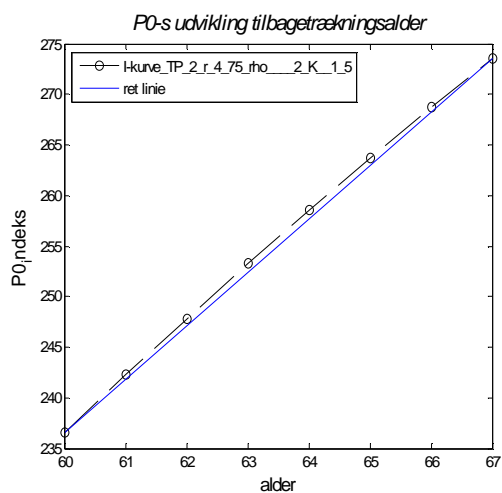
C: $\rho = 1,5$ og $k=1,5$



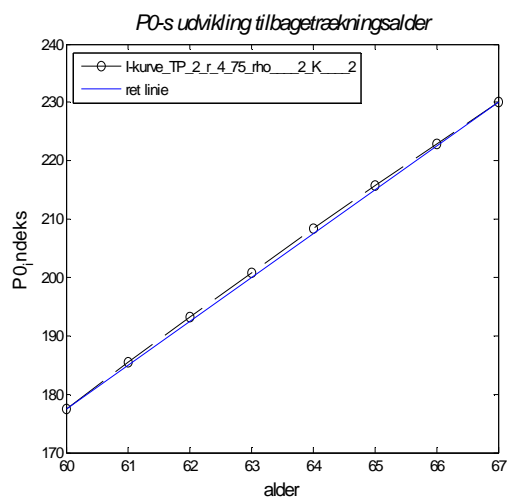
D: $\rho = 1,5$ og $k=2$



E: $\rho = 2$ og $k=1,5$



F: $\rho = 2$ og $k=2$

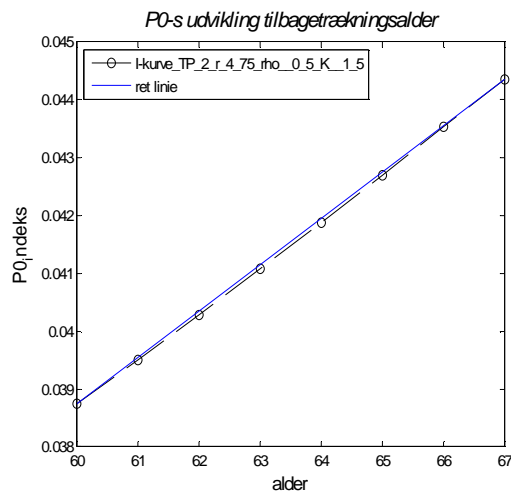


Indifferenskurverne krummer for store værdier af k

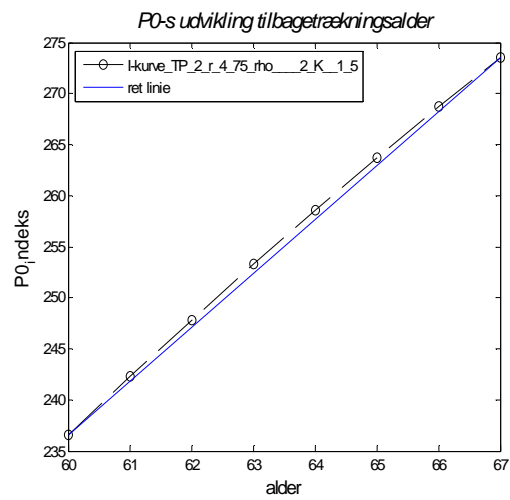
Indifferenskurverne krummer for store værdier af k , jf. figur 2 og 3 nedenfor. Figureerne viser $P_0(r, k)$ for stigende værdier af k . Det ses, at $P_0(r, k)$ krummer mere jo større værdi af k . Dette gælder både, når ρ er lille ($\rho=0,5$) og når ρ er stor ($\rho=2$ og $\rho=1,5$). For små værdier af ρ er der dog en smule krumning på $P_0(r, k)$ 'allerede' ved $k=3$, jf. figur 2c. Det skal her understreges, at $k=3$ afspejler ekstreme præferencer for fritid. Det betyder, at pensionskrone giver 3 gange så høj nytte som en lønkrone.

Figur 2: Indifferenskurver (CES-prisindeks, $P_0(r,k)$) for udvalgte værdier af ρ og k
 - graferne skal opdateres med nyeste modelversion

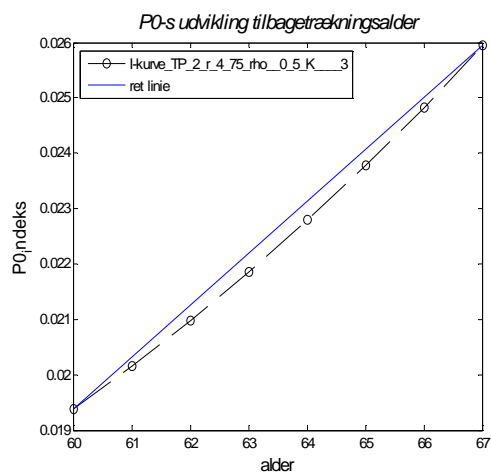
A: $\rho = 0,5$ og $k=1,5$



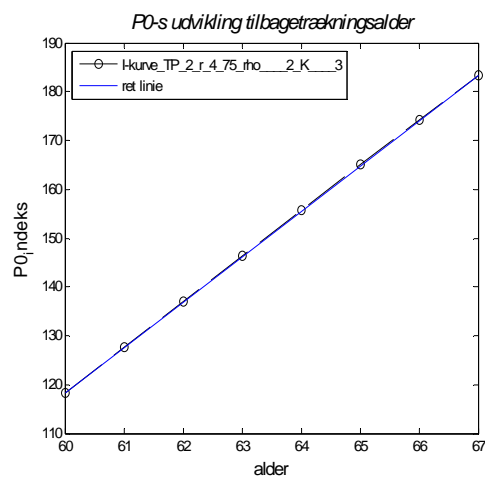
B: $\rho = 2$ og $k=1,5$



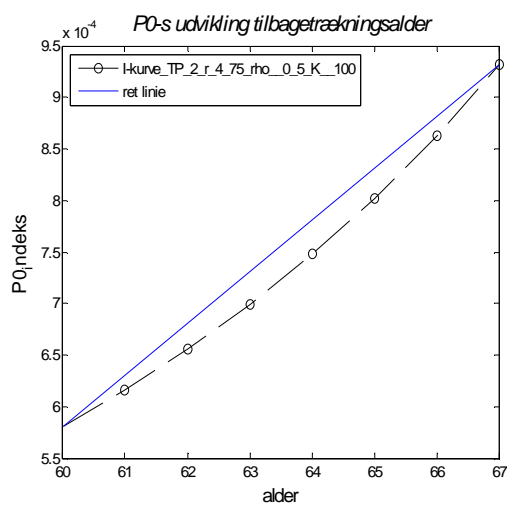
C: $\rho = 0,5$ og $k=3$



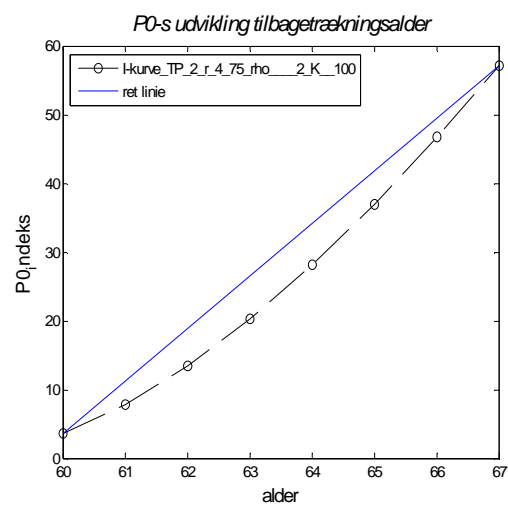
D: $\rho = 2$ og $k=3$



E: $\rho = 0,5$ og $k=100$

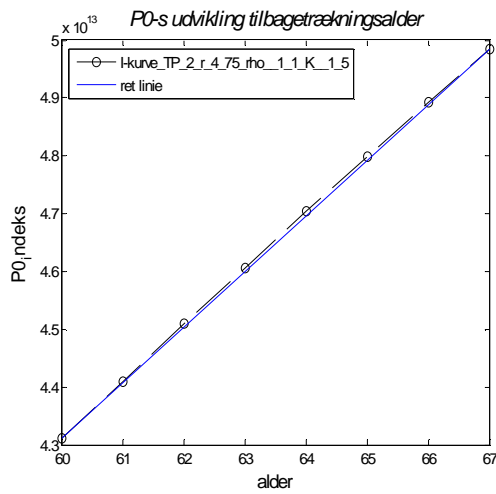


F: $\rho = 2$ og $k=100$

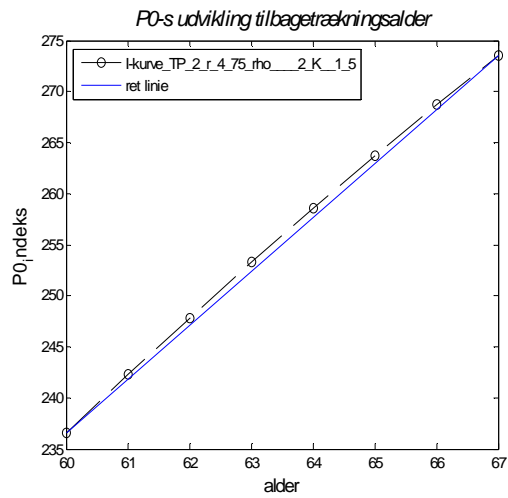


Figur 3: Indifferenskurver (CES-prisindeks, $P_0(r,k)$) for udvalgte værdier af ρ og k
 - graferne skal opdateres med nyeste modelversion

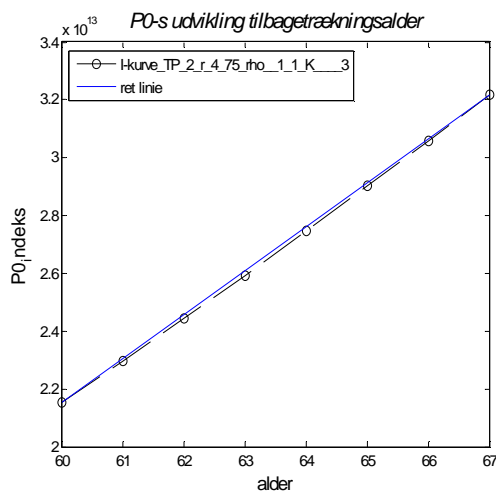
A: $\rho = 1,1$ og $k=1,5$



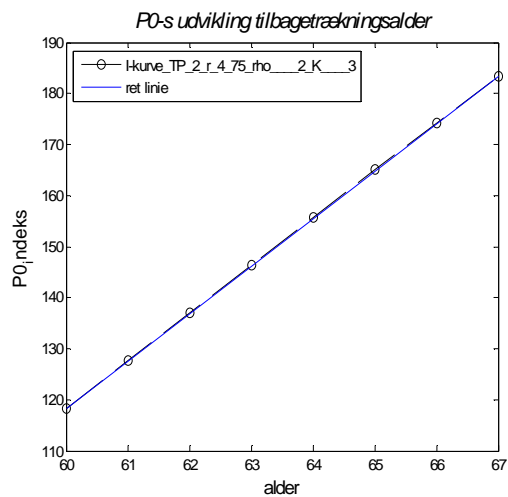
B: $\rho = 2$ og $k=1,5$



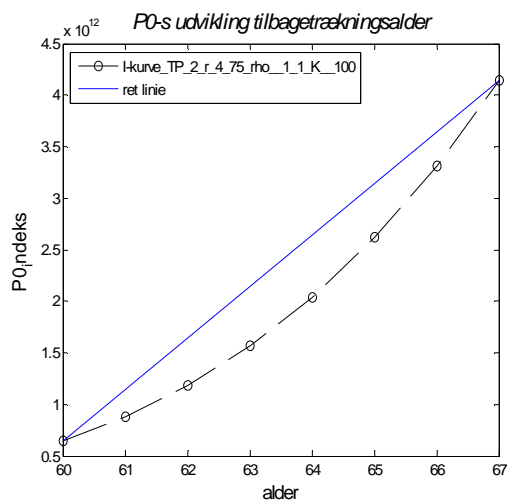
C: $\rho = 1,1$ og $k=3$



D: $\rho = 2$ og $k=3$



E: $\rho = 1,1$ og $k=100$



F: $\rho = 2$ og $k=100$

